Programma del Corso di ANALISI SUPERIORE N.1
Laurea Magistrale in Matematica – 7 CFU
A.A. 2016/2017
Prof. Francesco ALTOMARE, Dr.^{ssa} Mirella CAPPELLETTI MONTANO

RICHIAMI SU SPAZI TOPOLOGICI COMPATTI E LOCALMENTE COMPATTI [4, 7]

Spazi topologici compatti. Spazi topologici localmente compatti. Compattificazione di Alexandrov. Teoremi di tipo Urysohn. Teoremi di tipo partizione dell'unità. Spazi topologici localmente compatti numerabili all'infinito. Spazi topologici localmente compatti verificanti il secondo assioma di numerabilità. Spazi topologici separabili. Proprietà.

SPAZI DI FUNZIONI CONTINUE [5]

Lo spazio C(X) delle funzioni continue su uno spazio compatto X. Separabilità dello spazio C(X). Funzioni continue su uno spazio localmente compatto a supporto compatto. Funzioni continue convergenti all'infinito. Lo spazio $C_0(X)$ delle funzioni continue che si annullano all'infinito su uno spazio localmente compatto X. Lo spazio $C_*(X)$ delle funzioni continue convergenti all'infinito su uno spazio localmente compatto X. Separabilità degli spazi $C_0(X)$ e $C_*(X)$.

TEOREMI DI TIPO ASCOLI-ARZELA' [5]

Insiemi equicontinui di funzioni. Esempi e proprietà. Equicontinuità e convergenza uniforme. Teorema di Ascoli-Arzelà. Applicazioni allo studio di operatori integrali. Teorema di Banach sulla debole compattezza della sfera unitaria del duale di uno spazio di Banach separabile. Applicazioni compatte. Teoremi di tipo Ascoli - Arzelà in C_0 (X) e $C_*(X)$.

TEOREMI DI PUNTO FISSO [6, 7]

Teoremi di punto fisso. Il teorema di punto fisso di Brouwer. Applicazioni compatte. Il teorema di punto fisso di Schauder. Applicazioni ad equazioni integrali e a equazioni differenziali ordinarie. Il principio di Leray-Schauder e stime a priori. Applicazioni.

TEOREMI DI TIPO STONE-WEIERSTRASS [5]

Teoremi di densità per sottoreticoli e sottoalgebre di C(X,IR) e C(X,C), X compatto. I teoremi classici di Weierstrass (forma algebrica e forma trigonometrica). Applicazioni allo studio delle formule di quadratura. Teoremi di tipo Stone-Weierstrass in C_0(X,IR) e C_0(X,C), X localmente compatto. Applicazioni. Densità del rango della trasformazione di Fourier su $L_1(IR^n)$.

OPERATORI POSITIVI SU C0 (X), FORME LINEARI POSITIVE, MISURE DI RADON [4, 5]

Forme lineari positive ed operatori positivi su $C_0(X)$. Misure di Radon su uno spazio localmente compatto. Misure di Radon a supporto finito. Il duale dello spazio $C_0(X)$.

MISURE DI BOREL E MISURE DI BAIRE [3]

Reticoli di Stone. Insiemi *F*-aperti e loro proprietà. Spazi topologici polacchi e spazi topologici normali. Sigma-algebra di Borel e Sigma-algebra di Baire e loro proprietà. Insiemi $C(X, \mathbf{R})$-aperti, $C_b(X, \mathbf{R})$-aperti e $\aleph(X, \mathbf{R})$-aperti.

Esempi di misure di Borel e Baire: misure con densità, misure immagine, prodotto di convoluzione.

Misure di Baire regolari e loro proprietà. Teorema di Lusin. Teorema di Rappresentazione di Riesz.

Convergenza vaga e sue proprietà. Legame tra convergenza vaga di una successione di distribuzioni di variabile aleatoria e la convergenza in misura delle variabili aleatorie. Convergenza debole e sue proprietà. Legami tra convergenza debole e convergenza vaga. Teorema di Poisson.

Convergenza debole e funzioni di distribuzione (Teorema di Helly e Polya). Topologia vaga e topologia debole. Insiemi relativamente vagamente compatti e vagamente compatti. Misure di Baire discrete e loro proprietà di densità.

Trasformata di Fourier di misure: definizioni, esempi e proprietà. Teorema di moltiplicazione. Teorema di Unicità. Differenziabilità della trasformata di Fourier di una misura. Legame tra convergenza debole e trasformata di Fourier di misure. Teorema di Continuità di Paul Lévy. Teorema di Continuità di Paul Lévy (caso generale). Teorema Centrale di convergenza

PROCESSI DI APPROSSIMAZIONE POSITIVI SU C0(X) E TEOREMI DI TIPO KOROVKIN [1, 2]

Teoremi di approssimazione di tipo Korovkin. I due teoremi di Korovkin. Equivalenza fra il teorema di Korovkin, il teorema di Bernstein ed il teorema di Weierstrass. Insiemi di Korovkin. Caratterizzazione degli insiemi di Korovkin in termini di misure di Radon. Esempi ed applicazioni.

Processi di approssimazione in spazi di funzioni continue. Gli operatori di Bernstein, Kantorovitch, Szasz-Mirakjan, Fejèr e Poisson e loro proprietà di approssimazione. Applicazioni: approssimazione di funzioni continue e di funzioni di potenza p-esima sommabile in termini di polinomi, convergenza secondo Cesàro e secondo Abel delle serie di Fourier di funzioni continue e periodiche, il problema classico di Dirichlet sul cerchio.

TESTI CONSIGLIATI:

[1] F. ALTOMARE, Korovkin-type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators, Surveys in Approximation Theory, Vol. 5, 2010, 92-164, scaricabile gratuitamente presso http://www.math.technion.ac.il/sat/papers/13/, ISSN 1555-578X;

[2] F. ALTOMARE-M. CAMPITI, Korovkin-type Approximation Theory and its Applications, De Gruyter Series Studies in Mathematics, 17, De Gruyter & Co. Berlin, New York ,1994;

[3] H. BAUER, Measure and Integration Theory, De Gruyter Series Studies in Mathematics, 26, De Gruyter & Co. Berlin, New York, 2001;

[4] G. CHOQUET, Lecture on Analysis, vol. I, W.A. Benjamin Inc., New York, 1969;

[5] G. B. FOLLAND, Real Analysis, J. Wiley & Sons Inc., New York, 1999;

[6] K. GOEBEL, A concise course on fixed point theorems, Yokohama Publishers, 2002;

[7] E. ZEIDLER, Applied Functional Analysis, Vol. 109, Springer – Verlag, Berlin, 1995.