Istituzioni di Analisi Superiore n. 1

Programma a.a. 2013–2014

titolare: prof. Enrico Jannelli

Analisi reale

1. Teoria della misura e dell'integrazione astratta: σ–algebre, insiemi misurabili, funzioni misurabili – proprietà elementari della misura – integrazione di funzioni positive e di funzioni a valori complessi – proprietà di convergenza per successioni di integrali: teoremi di Beppo Levi, di Fatou, di Lebesgue – serie di integrali – completamento di una misura – teorema di Severini–Egoroff – teorema di passaggio al limite di Vitali.

2. Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$: pluriintervalli, misura esterna di Lebesgue, misura interna di Lebesgue – insiemi misurabili secondo Lebesgue – esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ – misure boreliane invarianti per traslazione – misura di Lebesgue e applicazioni lineari: l'interpretazione geometrica del determinante di una matrice.

3. Gli spazi L^p: disuguaglianze di Jensen, di Hölder e di Minkowsky – completezza degli spazi $L^p(\mu)$ – proprietà di continuità delle funzioni misurabili in $\mathbb{R}^k$: il teorema di Lusin – proprietà di densità negli spazi $L^p(\mathbb{R}^k)$ delle funzioni continue a supporto compatto – $C_0(\mathbb{R}^k)$ come completamento in norma uniforme di $C_c(\mathbb{R}^k)$.

4. Teoria elementare degli spazi di Hilbert: definizione, disuguaglianza di Schwarz, disuguaglianza triangolare – teorema di minima norma per convessi chiusi – teorema dei proiettori ortogonali – problema della migliore approssimazione – insiemi ortonormali, caratterizzazione degli insiemi ortonormali massimali, esistenza di insiemi ortonormali massimali – identità di Bessel, identità di Parseval, isomorfismo tra H e $l^2(A)$ – lo spazio $L^2(T)$ e le serie di Fourier – gli spazi $H^s(T)$ e $H^s(T^n)$, e relativi teoremi di immersione in $C(T)$, $C(T^n)$ – teorema di rappresentazione di Riesz dei funzionali su uno spazio di Hilbert.

Analisi complessa

5. Introduzione alla teoria delle funzioni olomorfe: derivabilità in senso complesso: proprietà, interpretazione geometrica – olomorfia e differenziabilità – equazioni di Cauchy–Riemann e corollari – alcune funzioni elementari: funzione esponenziale, funzioni trigonometriche, funzioni polidrome e loro selezioni, funzione logaritmo, funzione potenza – curve, cammini e circuiti – richiami sulle forme differenziali – omotopia – semplice connessione – relazioni tra chiusura ed esattezza di una forma differenziale – integrazione di funzionmi complesse su cammini – primitive di funzioni complesse – forme differenziali associate a una funzione olomorfa – caratterizzazione dell'esistenza di primitive – serie di potenze complesse: raggio di convergenza, convergenza uniforme, teorema di Cauchy–Hadamard – test di Abel–Dirichlet – teorema di Abel – prodotto alla Cauchy – funzioni analitiche – analiticità dell'integrale di Cauchy

6. Teorema di Cauchy e analiticità delle funzioni olomorfe: teorema di Goursat – esistenza di primitive locali – formula integrale di Cauchy – analiticità delle funzioni olomorfe – teorema di Morera – formula di Cauchy per le derivate – stime di Cauchy per le derivate – teorema fondamentale dell'algebra – teorema di Liouville per funzioni olomorfe limitate e sue generalizzazioni – teorema di Morera–Weierstrass – applicazioni al calcolo di integrali

7. Teorema degli zeri e funzioni armoniche: teorema degli zeri di una funzione olomorfa e corollari – unicità del prolungamento analitico – caratterizzazione dell'analiticità di funzioni di variabile reale – funzioni olomorfe e funzioni armoniche – proprietà del valor medio – formula di Pizzetti – caratterizzazione delle funzioni sub-armoniche e super-armoniche attraverso il loro valor medio – teorema di Liouville per funzioni positive e sue estensioni – principio di massimo per funzioni sub-armoniche – teorema della media per funzioni olomorfe – principio del massimo modulo, principio del minimo modulo.

8. Teorema dei residui e applicazioni: singolarità isolate – serie di Laurent – teorema sulla sviluppabilità in serie di Laurent – classificazione delle singolarità isolate e loro caratterizzazioni – il teorema di Picard (enunciato) – definizione di residuo – calcolo del residuo in un polo – definizione di indice di un punto rispetto a un circuito – teorema dell'indice – teorema dei residui – teorema di Cauchy (caso generale) – lemma di Jordan – applicazioni al calcolo di integrali, serie ed equazioni alle differenze – funzioni meromorfe – teorema dell'indice logaritmico – teorema di Rouché e corollari – teorema dell'applicazione aperta – teorema dell'invertibilità locale.

Testi consigliati

Per tutto il programma:

W. RUDIN – **Analisi reale e complessa** – Ed. Boringhieri

Per la sola costruzione della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^k$:

N. FUSCO, P. MARCELLINI & C. SBORDONE – **Analisi Matematica due** – Ed. Liguori

Per l'analisi complessa è utile consultare

G. GILARDI – **Analisi 3** – Ed. Mc Graw-Hill

S. LANG – **Complex Analysis** – Ed. Springer–Verlag

Si vedano, inoltre, le dispense del corso.