Istituzioni di Algebra Superiore
(Laurea Magistrale in Matematica)
Programma del Corso: A.A. 2009/2010

Docente: Prof. Roberto La Scala

Teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti e del gruppo simmetrico

Rappresentazioni lineari di un gruppo e di un algebra. Algebra gruppale. Rappresentazioni di un gruppo ciclico. Azione su insiemi. Rappresentazione regolare sinistra e destra. Rappresentazione canonica di $\mathbb{S}_n$. Azione sui laterali sinistri di un sottogruppo. G-moduli e sottomoduli. Moduli ciclici. Moduli semplici e semisemplici. Decomposizione a blocchi di una rappresentazione. Prodotto interno G-invariante. Rappresentazioni unitarie. Il complemento ortogonale è un sottomodulo. Teorema di Maschke. Omomorfismi di G-moduli. Rappresentazioni equivalenti. Lemmi di Schur. Intertwining numbers. G-endomorfismi. L'algebra commutante di una rappresentazione. Prodotto tensoriale di spazi e matrici. Struttura dell'algebra commutante. Teorema di Wedderburn-Artin. Il centro dell'algebra delle matrici. Struttura del centro dell'algebra commutante. Carattere di una rappresentazione. Carattere della rappresentazione canonica di $\mathbb{S}_n$. Carattere della rappresentazione regolare. I caratteri sono funzioni di classe. Spazio della funzioni di classe e sua dimensione. Tavola dei caratteri. Prodotto interno fra caratteri. Relazione fra caratteri di tipo I. Irriducibilità e molteplicità mediante il prodotto interno fra caratteri. I caratteri sono uguali se e solo se le rappresentazioni sono equivalenti. I caratteri del gruppo simmetrico sono reali. Caratteri di $\mathbb{S}_3$. Decomposizione in irriducibili del carattere della rappresentazione regolare. Il centro dell'algebra gruppale e le classi di coniugazione. Lo spazio delle funzioni di classe ha come base ortogonale i caratteri irriducibili. Le rappresentazioni irriducibili di un gruppo abeliano sono tutte lineari. Relazione fra caratteri di tipo II. Rappresentazione prodotto tensoriale del prodotto diretto di due gruppi. Tavola dei caratteri del prodotto diretto di due gruppi. Rappresentazione ristretta e indotta. La rappresentazione matriciale indotta è ben definita e non dipende dal trasversale. La rappresentazione indotta dalla rappresentazione banale. Il carattere della rappresentazione indotta. Teorema di reciprocità di Frobenius. Rappresentazioni del gruppo quoziente. Diagrammi e partizioni. Il sottogruppo di Young definito da una partizione. λ-tabelle e λ-tabloidi di riga. Moduli di permutazione (o indotti) M^λ. M^λ quando $\lambda = (n), (1^n), (n-1, 1)$. Ordinamento per dominanza. Lemma di dominanza per partizioni. L'ordinamento lessicografico raffina quello per dominanza. Sottogruppi stabilizzatori di riga e colonna di una tabella. Tabloidi di colonna. Simmetrizzatori e antisimmetrizzatori definiti da sottogruppi. Antisimmetrizzatore di colonna e sua fattorizzazione. Politabloide associato ad una tabella. Antisimmetrizzatori e politabloidi sotto l'azione di una permutazione. Il modulo di Specht S^λ e la sua ciclicità. S^λ quando $\lambda = (n), (1^n), (n-1,1)$. Lemma del segno. $k_t s \neq 0$ implica dominanza. Teorema del sottomodulo di James. $\mathrm{Hom}(S^\lambda, M^\nu) \neq 0$ implica dominanza. I moduli di Specht sono un sistema completo di irriducibili per $\mathbb{S}_n$. Decomposizione triangolare di M_μ. I caratteri di $\mathbb{S}_n$ sono interi. Composizioni di un intero. Ordinamento per dominanza dei tabloidi di riga e colonna. Lemma di dominanza per i tabloidi. Tabelle standard. Discendenti o violazioni di riga o colonna. Il tabloide di testa di un politabloide standard. I politabloidi standard sono linearmente indipendenti. Elemento di Garnir $g_{A,B}$ di una tabella contenente un discendente di riga. Se t è non-standard allora $g_{A,B}e_t = 0$. Leggi di raddrizzamento. Teorema di base standard per i politabloidi. La hook-formula e l'algoritmo RSK (cenni). Rappresentazione naturale di Young. Inner and outer corners di un diagramma. Branching rule per restrizione e induzione. λ-tabella generalizzata e suo contenuto. I μ-tabloidi sono in corrispondenza con le tabelle generalizzate di contenuto μ. L'omomorfismo $\bar{\theta}_T$ definito da una tabella generalizzata. $k_t T = 0$ se e solo se ci sono ripetizioni di colonna in T. Tabelle semistandard. Ordinamento per dominanza di classi di tabelle generalizzate. Lemma di dominanza per le tabelle generalizzate. Gli omomorfismi $\bar{\theta}_T$ sono linearmente indipendenti. Coefficienti di un generico omomorfismo $S^\lambda \to M^\nu$. Teorema di base (semi)standard per $\mathrm{Hom}(S^\lambda, M^\nu)$. Numeri di Kostka $K_{\lambda\mu}$ e regola di Young. Casi elementari per $K_{\lambda\mu}$.

Teoria dei moduli finitamente generati su domini ad ideali principali ed euclidei

L'anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano. Moduli e rappresentazioni: esempi fondamentali. Rappresentazione destra e sinistra di un anello. Moduli ciclici e ideali annullatori. Moduli liberi e basi. Indipendenza e torsione di una famiglia di elementi. Invarianza del rango di un modulo libero. Omomorfismi fra moduli liberi. Matrici e cambiamenti di base: convenzioni di riga e colonna. Determinante non-nullo e unitario. Endomorfismi di moduli liberi ingettivi e surgettivi. Somme dirette di moduli. Domini ad ideali principali (PID) ed euclidei: richiami. Moduli finitamente generati. Modulo delle relazioni (sizigie). I sottomoduli di un modulo libero sono liberi. Risoluzioni libere (cenni). Matrici di presentazione e cambiamenti di presentazione. Matrici elementari, operazioni elementari di riga e colonna. Forma normale di Smith e di Hermite: algoritmi nei domini euclidei. Fattori invarianti e fattori determinantali. Struttura dei moduli f.g. su PID. Moduli di torsione. Ogni modulo f.g. è somma diretta di un modulo di torsione ed di un modulo libero. Rango di un modulo f.g. su PID. Decomposizione e composizione di moduli ciclici (teorema cinese del resto). p-componenti distinte sono a somma diretta. Decomposizione in p-componenti di un modulo di torsione. Moduli ciclici primari e divisori elementari. Struttura dei moduli f.g. come somma di sottomoduli ciclici primari. Teorema di invarianza della struttura. Classi di isomorfismo di moduli f.g. su PID. Struttura dei gruppi abeliani f.g. e finiti. Un gruppo abeliano f.g. è di torsione se e solo se è finito.

I p-gruppi di Sylow sono le p-componenti. Classi di isomorfismo di p-gruppi abeliani: partizioni dell'esponente. Endomorfismi di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Similitudine di matrici ad elementi in un campo. Azione di un endomorfismo: $K[\lambda]$-moduli. I $K[\lambda]$-moduli sono di torsione: polinomio minimo: Presentazione di un $K[\lambda]$-modulo: matrice caratteristica. Fattori invarianti della matrice caratteristica. Il polinomio minimo è l'ultimo fattore invariante. Il polinomio caratteristico è l'ultimo fattore determinatale. Teoremi di Caley-Hamilton e Frobenius. Similitudine su F ed equivalenza su $F[\lambda]$. $F[\lambda]$-moduli ciclici: matrice compagne. Matrici non-derogatorie. Forma canonica razionale (Frobenius). Campo di spezzamento di un endomorfismo. I divisori elementari sono potenze di polinomi lineari: blocchi di Jordan. Forma canonica di Jordan. Autovettori nella forma canonica di Jordan. Molteplicità geometrica e algebrica. Polinomio minimo e diagonalizzabilità di un endomorfismo.

Testi consigliati:

1. N. Jacobson, Basic Algebra I, Freeman e Co, New York, 1989
2. M. Artin, Algebra, Bollati Boringhieri, Torino, 1997
3. S. Lang, Algebra, Springer GTM, New York, 2002
4. B.E. Sagan, The symmetric group, Springer GTM, New York, 2000