PROGRAMMA DI GEOMETRIA SUPERIORE 1

MATEMATICA (Laurea specialistica).

A.A. 2009/10 - Prof.ssa Maria Falcitelli.

Esempi di varietà differenziabili.

Spazi vettoriali reali di dimensione finita, con particolare riferimento a $\boldsymbol{R}^n$. La sfera $\boldsymbol{S}^n(r)$. Lo spazio proiettivo $P_n(\boldsymbol{R})$. Lo spazio iperbolico $\boldsymbol{H}^n_r$.

Derivazioni dell'algebra tensoriale.

Definizione di derivazione dell'algebra tensoriale e proprietà di localizzabilità. Azione di una derivazione sulle 1-forme e sui campi tensoriali. Derivazione determinata da un campo tensoriale di specie $(1,1)$. Derivata di Lie rispetto a un campo vettoriale. Teorema di rappresentazione di una derivazione.

Connessioni lineari.

Definizione di connessione lineare su una varietà M. Derivata covariante di un campo tensoriale rispetto a una connessione. Connessione indotta su un aperto da una connessione su M. Proprietà di localizzabilità rispetto a una connessione. La connessione canonica su $\mathbf{R}^n$. Legame tra due connessioni su M. Derivata covariante di un campo vettoriale lungo una curva, rispetto a una connessione. Campi vettoriali paralleli e relative equazioni. Geodetiche rispetto a una connessione: definizione ed equazioni. Geodetiche rispetto alla connessione canonica su $\mathbf{R}^n$. Costruzione di una famiglia di connessioni avente le stesse geodetiche di una connessione assegnata. Trasporto parallelo lungo una curva. Esistenza di geodetiche di condizioni iniziali assegnate. Campo tensoriale di torsione di una connessione. Connessioni simmetriche. Equazioni di struttura di Cartan (del I tipo). Campo tensoriale di curvatura di una connessione. Connessioni piatte. Equazioni di struttura di Cartan (del II tipo). Identità del Bianchi.

Varietà Riemanniane.

Definizioni di metrica Riemanniana su una varietà e di varietà Riemanniana. Metrica indotta su una sottovarietà di una varietà Riemanniana. Esempi: la metrica canonica su $\mathbf{R}^n$ e la metrica indotta su $\mathbf{S}^n(r)$; struttura di varietà Riemanniana sullo spazio iperbolico $\mathbf{H}^n_r$. Identificazione tra gli spazi vettoriali tangente e cotangente in un punto di una varietà Riemanniana. Prodotto scalare tra tensori di specie (r,s). Gradiente di una funzione.Traccia di un campo tensoriale di specie $(1,1)$. La connessione di Levi-Civita e i simboli di Christoffel. Calcolo dei simboli di Christoffel su $\mathbf{R}^n, \mathbf{S}^n(r), \mathbf{H}^n_r$. Trasporto parallelo su una varietà Riemanniana, come isometria. Isometrie tra varietà Riemanniane. Trasporto parallelo tra varietà isometriche. Distanza indotta da una metrica Riemanniana. Varietà complete e geodeticamente complete. Esempi.

Curvatura Riemanniana.

Campo tensoriale di curvatura Riemanniana e relative proprietà. Curvature sezionali. Varietà con curvatura sezionale puntualmente costante: definizione e caratterizzazione. Lemma di Schür. Definizione ed esempi di space-forms. Classificazione degli space-forms completi e semplicemente connessi. Spazi di rivestimento. Lo spazio proiettivo reale $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$. La sfera $\mathbf{S}^n(1)$ come rivestimento Riemanniano di $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$. Classificazione degli space-forms completi di dimensione pari. Campo tensoriale di Ricci e curvatura scalare. Varietà Riemanniane di Einstein: definizione ed esempi. Varietà di Einstein 3-dimensionali. Curvatura scalare di una varietà di Einstein.Campo tensoriale di Weyl: definizione e proprietà. Una caratterizzazione delle varietà Riemanniane a curvatura sezionale costante, in termini del campo tensoriale di Weyl.

Ulteriori esempi e proprietà delle varietà Riemanniane.

Elicoide, come esempio di varietà a curvatura non costante. Metriche Riemanniane conformi e omotetiche e relazioni tra le corrispondenti connessioni di Levi-Civita e curvature. Invarianza del campo tensoriale di Weyl rispetto ai cambiamenti conformi di una metrica. Varietà conformemente piatte. Alcuni richiami sui gruppi di Lie. Metriche invarianti a sinistra su un gruppo di Lie. Il gruppo di Heisenberg come esempio di gruppo di Lie dotato di metrica invariante a sinistra. Metriche biinvarianti su un gruppo di Lie e relative proprietà di curvatura. Il gruppo $SU(2)$ come esempio di gruppo di Lie dotato di metrica biinvariante e isometrico alla sfera $\mathbf{S}^3(1)$.

Testi consigliati.

W. Boothby: An introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry - Academic Press;
M. Do Carmo: Riemannian Geometry - Birkhäuser;
S. Helgason: Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces - Academic Press;
W. Klingenberg: Riemannian Geometry - Walter de Gruyter;
S.Kobayashi, K.Nomizu: Foundations of Differential Geometry, I - Interscience Publishers;
M.M. Postnikov: Geometry VI- Riemannian Geometry - Springer, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 91;
G. Walschap: Metric structures in differential Geometry- Springer;
Warner- Foundations of differentiable manifolds and Lie groups - Scott Foresman.