

ALGEBRA SUPERIORE

Prof. ssa Margherita Barile

Programma

Il corso si propone di fornire le nozioni e gli strumenti di base comuni a tutte le teorie omologiche, con particolare riferimento alle strutture algebriche e con un linguaggio categoriale. Gli argomenti trattati sono i seguenti:

Elementi di Teoria delle Categorie:

Definizione di categoria. Morfismi, isomorfismi, monomorfismi, epimorfismi. Oggetti nulli, conulli e zero. Categorie bilanciate. Nuclei e conuclei nelle categorie con oggetto zero. Categorie normali, conormali, esatte. Sottoggetti, oggetti quoziente e loro classi di isomorfismo. Definizione categoriale di sequenza esatta, caso delle categorie esatte. Equalizzatori, coequalizzatori. Pullback e pushout. Prodotti e coprodotti. Sottocategorie piene e non. Categorie quoziente. Categorie prodotto. Categorie duali. Categorie preadditive, semiadditive, additive. Funtori covarianti e controvarianti, isomorfismi e anti-isomorfismi. Funtori fedeli e pieni. Trasformazioni naturali. Funtori isomorfi. Categorie equivalenti. Funtori additivi.

Algebra omologica per i moduli su anelli commutativi unitari:

Sequenze esatte e complessi. Sequenze esatte corte spezzanti. Diagram chasing: lemma dei 4, lemma dei 5 (corto, di Steenrod), lemma degli 8, lemma dei 9, lemma del serpente. Moduli proiettivi: definizione e caratterizzazioni, confronto con i moduli liberi, caso dei moduli su un PID. I funtori $\text{Hom}_R(M, -)$ e $\text{Hom}_R(-, M)$. Moduli iniettivi: definizione e caratterizzazioni, criterio di Baer, moduli divisibili. Moduli coliberi. Formula d'aggiunzione. Sottomoduli e moduli quoziente dei moduli proiettivi ed iniettivi. Moduli e complessi di omologia. Funtore di omologia. Morfismo di complessi e omotopia. Risoluzioni proiettive ed iniettive. Teorema del confronto. Horseshoe Lemma. Funtori derivati. Sequenze esatte lunghe di omologia. I funtori $-\otimes_R M$ e $M \otimes_R -$. Moduli piatti. Funtori Ext e Tor e relativi criteri di annullamento. Funtori di localizzazione. Proprietà del funtore Tor. Il funtore Ext e le estensioni di moduli. Cenni alla coomologia di gruppo.

Testi consigliati

- P.J. Hilton, U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*, Springer, 1982.
- B. Mitchell, *Theory of Categories*, Academic Press, 1965.
- D.G. Northcott, *A first course of homological algebra*, Cambridge University Press, 1973.