CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2008/09

<u>Appello del 12 gennaio 2010</u>

1. Si consideri la seguente permutazione:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 9 & 5 & 8 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_9.$$

   Determinare una decomposizione di σ^{123} in cicli disgiunti.

2. Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   (a) Provare che A è un sottoanello unitario dell'anello $M_2(\mathbb{Z})$.
   (b) Dire se A è commutativo.
   (c) Provare che l'applicazione $\varphi : A \to \mathbb{Z}_{13}$ tale che, per ogni $a,b \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} = [a-4b]_{13},$$

   è un omomorfismo di anelli.
   (d) Dire se φ è surgettivo.

3. Dato il polinomio $f(x) = 4x^6 - 2x^5 - 14x^2 - 7x + 7 \in \mathbb{Z}[x]$,

   (a) determinare una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$,
   (b) trovare tutte le radici in $\mathbb{Z}_3$ della sua riduzione $\overline{f}(x)$ modulo 3.