CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2024/25

Appello del 1° luglio 2025

1. Si considerino in S_{24} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7,8)(9,10,11,12,13)(14,15,16,17,18,19,20)(21,22)(23,24)$$
$$\tau = (1,3)(2,4)(5,7)(6,8)(9,13,12,11,10)(14,16,18,20,15,17,19)(21,23,22,24).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{24}: $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{24} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
(b) Determinare un sottogruppo di $C(\sigma) \cap C(\tau)$ avente ordine 64.

2.

(a) Determinare il numero degli omomorfismi di anelli da $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Z}_{21}$.
(b) Determinare il numero degli omomorfismi di gruppi da $\mathbb{Z}_{25}$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$.
(c) Definire un epimorfismo di anelli da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ e determinarne il nucleo.

3. Dato un numero primo p positivo, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2} + x^p + x + \bar{1},$$
$$g(x) = x^{p^3} + x^{p^2} + x + \bar{1}.$$

(a) Determinare, al variare di p, $\mathrm{MCD}(f, g)$.
(b) Dimostrare che $g(x)$ non ha radici multiple in $\mathbb{Z}_p$.