

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2015/16

Appello del 12 settembre 2016

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{18} :

$$\sigma = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11)(12, 13, 14)$$

$$\tau = (9, 14, 11, 13, 10, 12)(15, 16, 17, 18)$$

- (a) Determinare l'insieme delle coppie di interi (k, ℓ) tali che $\sigma^k = \tau^\ell$.
- (b) Dire se l'insieme $H = \{\sigma^n \tau^m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo ciclico di S_{18} .

2.

- (a) Determinare due distinti omomorfismi di gruppi non nulli $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7$.
- (b) Determinare un omomorfismo di anelli non nullo $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7$.
- (c) Provare che non esiste alcun monomorfismo di gruppi $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_{34}$.

3. Sia p un numero primo positivo, e sia $f(x) = x^{p^2} - x^p - 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

- (a) Provare che $f(x)$ non ha radici razionali.
- (b) Per $p = 3$ determinare una fattorizzazione della riduzione di $f(x)$ modulo 3 in $\mathbb{Z}_3[x]$.