CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2023/24

<u>Appello del 10 settembre 2024</u>

1. Si consideri in S_{21} la seguente permutazione:

$$\sigma = (1,2)(3,4)(5,6,7)(8,9,10,11,12)(13,14,15,16,17,18,19,20,21).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{21}:

$$C(\sigma) = \{\alpha \in S_{21} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}.$$

(a) Determinare una coppia di interi (n,m) tali che i sottogruppi $\langle \sigma^n \rangle$ e $\langle \sigma^m \rangle$ siano non banali ed abbiano intersezione banale.

(b) Dire se $C(\sigma)$ è abeliano.

(c) Determinare un sottogruppo di $C(\sigma)$ avente ordine 135.

2. Determinare il numero

(a) dei monomorfismi di anelli da $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Z}_{42}$.

(b) degli epimorfismi di gruppi da $\mathbb{Z}_{42}$ a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$.

3. Dato un numero primo $p > 0$, si considerino i seguenti due polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^3} + x^{p^2} + x^p + \bar{1},$$
$$g(x) = x^{p^2} - x^p - x + \bar{1}.$$

(a) Determinare, al variare di p, $\mathrm{MCD}(f(x), g(x))$.

(b) Determinare, al variare di p, il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $g(x)$.