Risoluzione delle equazioni

Equazioni di secondo grado

Un esempio di procedimento risolutivo compare nella tavoletta BM 13901 conservata presso il *British Museum* di Londra, di cui diamo prima la traduzione verbale in italiano:

Ho aggiunto l'area e il lato del mio quadrato	**0;45**
Poni **1**, *l'unità. La dividi in due*	**0;30**
La moltiplichi per **0;30**	**0;15**
Aggiungi **0;15** a **0;45**	**1**
**Questo è il quadrato di*	**1**
Sottraigli **0;30**, *che hai moltiplicato*	**0;30**, *il lato del quadrato*

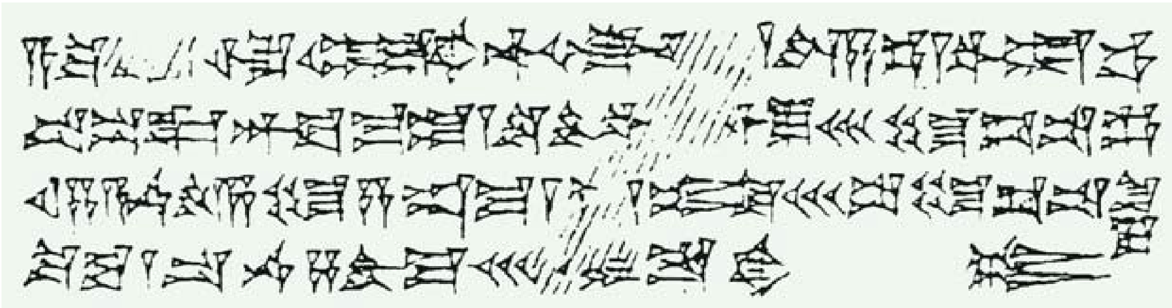
Il testo è stato riportato fedelmente, nell'ordine originario: va letto per righe, la separazione in due colonne serve solo per distinguere le prescrizioni riguardanti le operazioni da effettuare (sinistra), dai risultati via via ottenuti (destra). Il caso del passo* merita un discorso a parte, in quanto una sola frase (apparentemente solo affermativa, non imperativa) racchiude sia la prescrizione (estrarre la radice quadrata di 1), sia il risultato.

Ed ecco la traduzione nel linguaggio attuale, prima con riferimento ai dati numerici particolari, poi con coefficienti indeterminati.

$x^2 + x = \mathbf{0;45}$
$\frac{1}{2} = \mathbf{0;30}$
$\mathbf{0;30 \cdot 0;30 = 0;15} \quad (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4})$
$\mathbf{0;15 + 0;45 = 1}$
* $\sqrt{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$
$\mathbf{1 - 0;30 = 0;30} \;\; (x = 0;30)$

$x^2 + px = q$	$x^2 + px - q = 0$
$\frac{p}{2}$	
$\left(\frac{p}{2}\right)^2$	
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$	
* $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$	
$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$	$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{4}}$

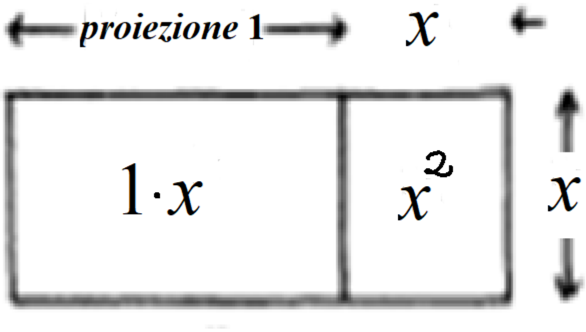
Ecco la trascrizione del problema in caratteri cuneiformi:



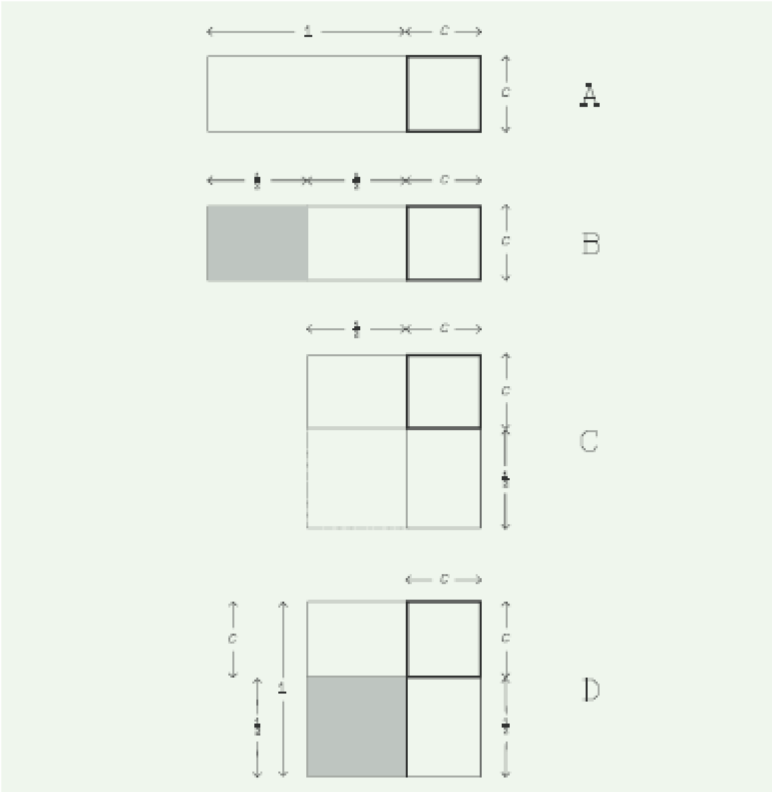
e la traslitterazione nel nostro alfabeto:

1. A.ŠÀ$^{[lam]}$ *ù mi-it-ḫar-ti ak-m[ur-m]a* 45-E 1 *wa-ṣi-tam*
2. *ta-ša-ka-an ba-ma-at* 1 *te-ḫe-pe* [3]0 *ù* 30 *tu-uš-ta-kal*
3. 15 *a-na* 45 *tu-ṣa-ab-ma* 1-⌈E] 1 ÍB.SI$_8$ 30 *ša tu-uš-ta-ki-lu*
4. *lìb-ba* 1 *ta-na-sà-aḫ-ma* 30 *mi-it-ḫar-tum*

La prima parola, *A.ŠÀ*, significa *superficie*, e fa riferimento all'area di un quadrato (*mitḫartum*): il termine usato indica anche il lato del quadrato e deriva da *mitḫāru* (corrispondente), a sua volta legato al verbo *maḫārum* (fronteggiare). L'idea geometrica soggiacente è quella di una figura formata da quattro lati uguali che si affacciano l'uno sull'altro. L'area del quadrato (corrispondente, per noi, al quadrato dell'incognita x^2) deve essere sommata al suo lato (x); l'addizione è indicata dal verbo il cui infinito è *kamārum* e che qui compare nella forma coniugata *akmur(ma)* (*ho accumulato (e)*). Questo non è l'unico termine utilizzato dai Babilonesi per indicare l'addizione. Si riferisce ad un'operazione di *accumulo*, consistente nell'unione di due parti di diversa natura, che, nel risultato, perdono le rispettive identità per formare un nuovo oggetto (il *kimirtum*, il *cumulo*, usato anche al plurale, *kimrātum*, nel caso in cui le due parti rimangano distinte). In questo caso ci troviamo effettivamente di fronte a due entità geometricamente disomogenee (un'area e una lunghezza, come nell'espressione $x^2 + x$), che, congiuntamente, danno origine ad un'area: la chiave del procedimento è racchiusa nel termine *wāṣītum* (qui all'accusativo) che significa *proiezione*, e che è una "larghezza" di cui si dota mentalmente la lunghezza (il lato) per trasformarla in una superficie. La misura di questa proiezione è, in questo caso, 1, che trasforma x in $x \cdot 1$ e porta ad interpretare il numero risultante 0;45 (termine noto dell'equazione) come l'area di un rettangolo.

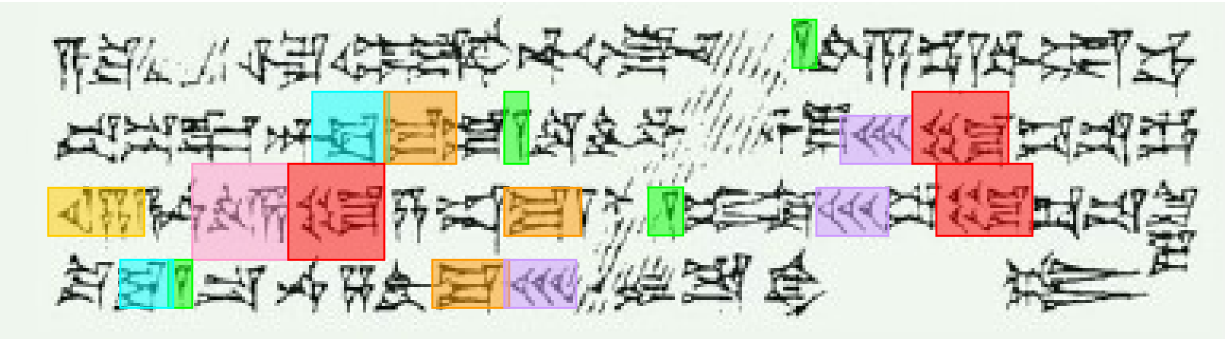


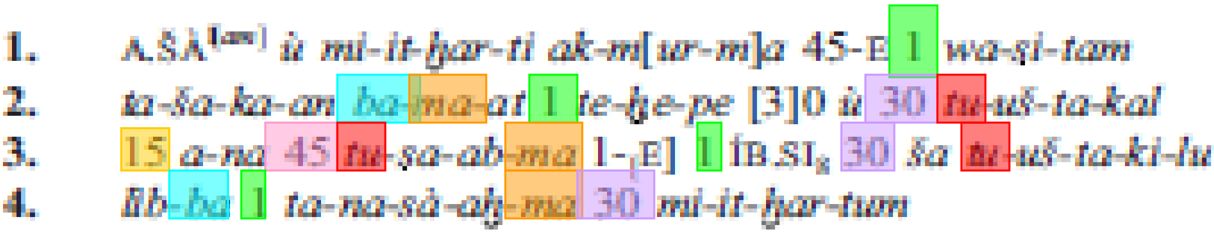
Il termine *proiezione* deriva dalla visualizzazione geometrica che vede il segmento di lunghezza protendere dal lato del quadrato, come per prolungarlo. Algebricamente, il numero 1 va interpretato dunque come il coefficiente del termine di primo grado dell'equazione, quello che avevamo indicato con p. Lo stesso numero 1 viene ripreso (*posto*, come indicato dalla voce verbale *tašakkan,* che si traduce come *poni*) al rigo successivo per essere diviso a metà. Le due parole che circondano 1 significano, nell'ordine, *a metà* e *tu spezzi*. Seguono l'annuncio del risultato (0;30) e l'indicazione di moltiplicare per 0;30: tale operazione è espressa da una voce del verbo *akālum*, che qui va intesa nel senso di *far tenere*, o *contenere*. E questo è l'ultimo passo del procedimento geometrico che, a partire dalla situazione iniziale, pone le premesse della successiva operazione aritmetica:



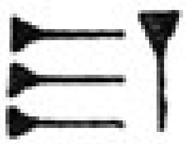
In sintesi, la costruzione è la seguente: il rettangolo avente lati x (c nella figura) ed 1 viene diviso in due rettangoli uguali come effetto della divisione a metà del lato di lunghezza 1. Entrambi hanno lati x e 0;30. Uno di questi viene spostato ed attaccato ad un lato del quadrato di area x^2 (c^2 nella figura). Si ottiene uno *gnomone* (figura a forma di L), la cui area è quella della figura iniziale, ossia sempre 0;45. Questo può essere completato ad un quadrato con l'aggiunta di un quadrato (quello grigio della figura) la cui area è 0;15 (il quadrato di 0;30). Siamo così giunti al rigo 3 del testo della tavoletta, che inizia con l'indicazione di sommare 0;15 a 0:45. Qui il verbo usato non è quello del primo rigo, bensì è una voce di *waṣābum*, che denota l'azione concreta di congiungere un ente con un altro ente della stessa natura, con l'effetto di ingrandirlo. Il primo ente, in questo caso, conserva la sua identità, mentre il secondo ne risulta assorbito. Il risultato dell'operazione è 1. Il discorso prosegue, sullo stesso rigo, dopo la separazione (denotata da E), con l'estrazione della radice quadrata di 1, che è ancora 1: il passaggio è indicato da IB.SI, un termine sumerico che esprime l'*uguaglianza di lati*, e può essere riferito, secondo i casi, al quadrato o al suo lato (un uso linguistico che corrisponde all'equivalenza "logica" fra la conoscenza della lunghezza del lato e la conoscenza dell'area del quadrato). La frase seguente, che si legge a cavallo tra il terzo e il quarto rigo, indica la sottrazione di 0;30 da 1, che porta al valore 0;30 del lato (*mitḫartum*). Il periodo inizia con le parole *0;30, che avevi fatto tenere* e prosegue con *dall'interno 1 strappi via*. Il termine *libbum* viene utilizzato nel linguaggio comune per denotare il *cuore* o le *viscere* e qui sottolinea il modo in cui va concepito 1 in questo contesto, ossia come una sorta di corpo, un "tutto" dotato di parti. L'operazione a cui viene sottoposto, espressa dal verbo *nasāḫum*, è l'inversa dell'addizione intesa come *congiunzione*: da un ente viene rimossa una parte, che è della sua stessa natura (un segmento da un segmento).

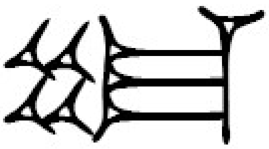
Riprendiamo la trascrizione del testo cuneiforme, evidenziando alcune parti – numeri e sillabe – riconoscibili:

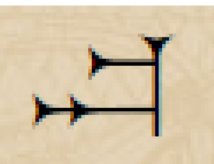


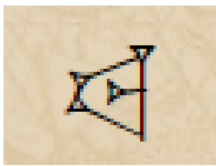


1. A.ŠÀ[lam] ù mi-it-ḫar-ti ak-m[ur-m]a 45-E 1 wa-ṣi-tam
2. ta-ša-ka-an ba-ma-at 1 te-ḫe-pe [3]0 ù 30 tu-uš-ta-kal
3. 15 a-na 45 tu-ṣa-ab-ma 1-[E] 1 ÍB.SI$_8$ 30 ša tu-uš-ta-ki-lu
4. lìb-ba 1 ta-na-sà-aḫ-ma 30 mi-it-ḫar-tum

 ma

 tu

 ba

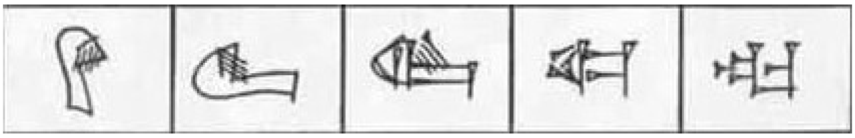


Logogramma sumerico (*dimezzare*)

Un altro esempio di *sillabogramma* tratto dalla tavoletta:

 ka

Ecco l'evoluzione dall'originario *logogramma* (simbolo stilizzato raffigurante l'oggetto a cui si riferisce):



bocca

È stato realizzato aggiungendo al logogramma della testa un insieme di tratti indicatori (*gunû*).
Il suono che noi attribuiamo alle parole, naturalmente, è presunto.

Immagine della tavoletta 13901 (fronte) dal sito del *British Museum* (nel riquadro il problema studiato):