CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2010/11

<u>Appello del 21 febbraio 2011</u>

1. Data la permutazione

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 13 & 12 & 3 & 8 & 2 & 14 & 4 & 10 & 6 & 5 & 11 & 9 & 1 \end{pmatrix} \in S_{14},$$

sia $G = \langle \alpha \rangle$.

   (a) Provare che $D = \{\sigma \in G \mid o(\sigma) \text{ è dispari}\}$ è un gruppo ciclico e determinarne un generatore.
   (b) Determinare $S = \{\sigma \in G \mid \sigma^2(3) = 8\}$, precisando la sua cardinalità.
   (c) Provare che G è l'unico sottogruppo di G contenente $\{\alpha^6, \alpha^{10}, \alpha^{15}\}$.

2.
   (a) Dire per quali numeri interi n, 15 divide $n^{16} + 14n^4 + 2n + 1$.
   (b) Provare che per nessun numero intero n, 16 divide $n^{16} + 14n^4 - 4n^2 - 3$.

3. Dato il polinomio $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, sia $A = \mathbb{Z}_2[x] / (f(x))$.

   (a) Determinare tutti gli elementi invertibili di A.
   (b) Dire se l'anello A è isomorfo all'anello prodotto diretto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.