CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2009/10

<u>Appello del 27 settembre 2010</u>

1. Data la permutazione

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 7 & 4 & 12 & 13 & 19 & 17 & 18 & 10 & 11 & 2 & 6 & 3 & 5 & 9 & 8 & 15 & 14 & 1 & 16 \end{pmatrix} \in S_{19},$$

   sia $G = \langle \alpha \rangle$.

   (a) Determinare un sottogruppo di G avente ordine 15.

   (b) Posto $H = \{\sigma \in G \mid \sigma(1) = 1,\ \sigma(2) = 2\}$, provare che H è un gruppo ciclico e determinarne l'ordine ed un generatore.

2. Provare che, per ogni numero intero n, il numero $(n+3)^9 + 4n + 2$ è divisibile per 5.

3. Sia $f(x) = x^{2121} - x^{21} + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

   (a) Determinare tutte le radici in $\mathbb{Z}_{101}$ della riduzione di $f(x)$ modulo 101.

   (b) Provare che la riduzione di $f(x)$ modulo 7 non ha radici in $\mathbb{Z}_7$.

   (c) Provare che la riduzione di $f(x)$ modulo 3 non ha radici in $\mathbb{Z}_3$.