CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2025/26

Appello del 26 gennaio 2026

1. Si considerino in S_{18} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)(10,11,12,13,14)(15,16)(17,18),$$
$$\tau = (1,3,2)(4,6,5)(7,8,9,10)(11,12,13,14)(15,17)(16,18).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{18}: $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{18} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
(b) Determinare un sottogruppo di $C(\sigma) \cap C(\tau)$ avente ordine 12.
(c) Dire se $C(\sigma)$ è abeliano.

2.

(a) Dire se esiste un monomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ a $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{40}$.
(b) Determinare, se possibile, un omomorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10}$ a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{20}$ il cui nucleo abbia ordine 20.

3. Dato un numero primo p positivo, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^3-p^2} + x^{p^2-p} + x^p + \overline{1},$$
$$g(x) = x^{p^2+2p} - x^{3p},$$
$$h(x) = x^{p^2-p} + x^{p-1} + x^p + \overline{1}.$$

(a) Determinare, al variare di p, $\mathrm{MCD}(f(x), g(x))$.
(b) Determinare, al variare di p, il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $h(x)$.