CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2009/10

<u>Appello del 21 giugno 2010</u>

1. Date le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 15 & 9 & 14 & 6 & 4 & 8 & 2 & 1 & 12 & 7 & 13 & 5 & 10 & 11 \end{pmatrix} \in S_{15},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 5 & 15 & 8 & 12 & 4 & 1 & 3 & 6 & 14 & 13 & 9 & 11 & 2 & 10 \end{pmatrix} \in S_{15},$$

siano $H_1 = \langle \sigma^2 \rangle, H_2 = \langle \tau^2 \rangle$. Determinare $H_1 \cap H_2$.

2. Sia $A = \left\{ a + bi\sqrt{5} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.
   (a) Provare che A è un sottoanello unitario di $\mathbb{C}$.
   (b) Dire se il numero $2 + i\sqrt{5}$ è invertibile in A.
   (c) Data l'applicazione $\varphi : A \to \mathbb{Z}_2$, definita ponendo $\varphi(a + bi\sqrt{5}) = [a+b]_2$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, dire se φ è un omomorfismo di anelli.
   (d) Determinare $\varphi^{-1}([1]_2)$.

3. Sia $f(x) = x^4 + 72x^3 + 76x^2 - 91x + 147 \in \mathbb{Z}[x]$.

   (a) Determinare una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$.
   (b) Determinare un numero primo p tale che la riduzione $\overline{f}(x)$ di $f(x)$ modulo p abbia in $\mathbb{Z}_p$ le radici $[1]_p, [2]_p, [3]_p, [4]_p$.