CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2014/15

<u>Appello del 3 luglio 2015</u>

1. Sia data in S_8 la seguente permutazione:

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6)(7,8).$$

   (a) Provare che $\langle \sigma \rangle$ è l'unico sottogruppo ciclico di S_8 contenente σ.

   (b) Determinare un sottogruppo di S_8 contenente $\langle \sigma \rangle$ ed avente ordine 12.

. 2. Dati gli interi λ, μ, sia $\varphi : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{16}$ l'applicazione definita ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi([a]_4, [b]_8) = [\lambda a + \mu b]_{16}.$$

   (a) Determinare tutti i valori di λ, μ per i quali φ è ben definita.

   (b) Determinare tutti i valori di λ, μ per i quali φ è suriettiva.

   (c) Determinare tutti i valori di λ, μ per i quali φ è un omomorfismo di anelli.

3. Dati un primo $p > 0$ ed il polinomio $f(x) = x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 62x - 40 \in \mathbb{Z}[x]$, sia $\overline{f}(x)$ la riduzione di $f(x)$ modulo p.

   (a) Determinare tutti i valori di p per i quali $\overline{f}(x)$ ha in $\mathbb{Z}_p$ una radice multipla.

   (b) Determinare tutti i valori di p per i quali $\overline{f}(x)$ ha in $\mathbb{Z}_p$ una radice tripla.