

Esame di *Calcolo delle probabilità e statistica* (per studenti di Informatica)

Università degli studi di Bari Aldo Moro

Docente: Stefano Rossi

04-02-2022

Esercizio 1. Un dado equilibrato a sei facce numerate da 1 a 6 viene lanciato N volte, dove N è una variabile di Poisson di parametro $\lambda > 0$.

- (1) Calcolare la probabilità che il numero 6 esca almeno una volta, verificando che vale $1 - e^{-\frac{\lambda}{6}}$.
- (2) Calcolare la probabilità che $N = 1$ sapendo che il numero 6 non è mai uscito.
- (3) Calcolare il limite per $\lambda \rightarrow \infty$ della probabilità al punto precedente e fornire un'interpretazione probabilistica del risultato trovato.

(Ricordare che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$, per ogni numero reale a .)

Esercizio 2. Verificare che per ogni valore del parametro $a > 0$ la funzione

$$f(x) = e^{-(x-a)} \chi_{[a, \infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

dove $\chi_{[a, \infty)}$ è la funzione caratteristica della semiretta $[a, \infty)$, è la densità di probabilità di una certa variabile aleatoria X .

- (1) Calcolare l'aspettazione della variabile aleatoria X , verificando che $E[X] = a + 1$.
- (2) Sfruttare il valore determinato sopra per ricavare uno stimatore corretto del parametro a in corrispondenza a un campione (X_1, X_2, \dots, X_n) di rango n distribuito come X .
- (3) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di a in corrispondenza a un campione (X_1, X_2, \dots, X_n) di rango n distribuito come X .
- (4) Determinare una statistica sufficiente per un campione (X_1, X_2, \dots, X_n) di rango n distribuito come X .

Esercizio 3.

- Dare le definizioni di errore di prima e seconda specie nell'ambito dei test statistici di verifica delle ipotesi.
- Un'azienda vinicola sostiene che il contenuto medio di vino nelle sue bottiglie sia superiore a 750cl. Un'associazione di consumatori decide di verificare quest'affermazione, analizzando un campione casuale di $n = 40$ bottiglie. Si trova una media campionaria $\bar{x} = 748$ cl con una varianza campionaria $\sigma_x^2 = 65$ cl². Quali conclusioni si possono trarre con un livello di significatività del 5% e del 10%?
- Calcolare il p -value (approssimato) del test al punto precedente.