

Esame di *Calcolo delle probabilità e statistica* (per studenti di Informatica)  
Università degli studi di Bari Aldo Moro  
Docente: Stefano Rossi  
04-02-2022

**Esercizio 1.** Un dado equilibrato a sei facce numerate da 1 a 6 viene lanciato  $N$  volte, dove  $N$  è una variabile di Poisson di parametro  $\lambda > 0$ .

- (1) Calcolare la probabilità che il numero 6 esca almeno una volta, verificando che vale  $1 - e^{-\frac{\lambda}{6}}$ .
- (2) Calcolare la probabilità che  $N = 1$  sapendo che il numero 6 non è mai uscito.
- (3) Calcolare il limite per  $\lambda \rightarrow \infty$  della probabilità al punto precedente e fornire un'interpretazione probabilistica del risultato trovato.

(Ricordare che  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$ , per ogni numero reale  $a$ .)

**Esercizio 2.** Verificare che per ogni valore del parametro  $a > 0$  la funzione

$$f(x) = e^{-(x-a)} \chi_{[a, \infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

dove  $\chi_{[a, \infty)}$  è la funzione caratteristica della semiretta  $[a, \infty)$ , è la densità di probabilità di una certa variabile aleatoria  $X$ .

- (1) Calcolare l'aspettazione della variabile aleatoria  $X$ , verificando che  $E[X] = a + 1$ .
- (2) Sfruttare il valore determinato sopra per ricavare uno stimatore corretto del parametro  $a$  in corrispondenza a un campione  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  di rango  $n$  distribuito come  $X$ .
- (3) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di  $a$  in corrispondenza a un campione  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  di rango  $n$  distribuito come  $X$ .
- (4) Determinare una statistica sufficiente per un campione  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  di rango  $n$  distribuito come  $X$ .

**Esercizio 3.**

- Dare le definizioni di errore di prima e seconda specie nell'ambito dei test statistici di verifica delle ipotesi.
- Un'azienda vinicola sostiene che il contenuto medio di vino nelle sue bottiglie sia superiore a 750cl. Un'associazione di consumatori decide di verificare quest'affermazione, analizzando un campione casuale di  $n = 40$  bottiglie. Si trova una media campionaria  $\bar{x} = 748\text{cl}$  con una varianza campionaria  $\sigma_x^2 = 65\text{cl}^2$ . Quali conclusioni si possono trarre con un livello di significatività del 5% e del 10%?
- Calcolare il  $p$ -value (approssimato) del test al punto precedente.