**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

# Algebra n.1

**Anno Accademico 2019/20**

**<u>Appello del 13 novembre 2020</u>**

1. Dato un intero positivo $n$, e posto $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$, per ogni $\sigma \in S_N$ sia $C(\sigma) = \{\alpha \in S_N \mid \sigma\alpha = \alpha\sigma\}$. Si supponga che $\sigma$ abbia struttura ciclica $(n, n-1, ..., 2, 1)$.

   (a) Nel caso in cui $n \geq 4$, dire se $C(\sigma)$ è un sottogruppo ciclico di $S_N$.
   (b) Sia $\sigma = (1,2,3)(4,5)$. Provare che $C(\sigma) = C((1,2,3)) \cap C((4,5))$.

2. Siano $n$ ed $m$ interi maggiori di 1.

   (a) Dimostrare che esiste un omomorfismo di gruppi non nullo e non bigettivo $\varphi : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{nm}$. Determinare esplicitamente un omomorfismo siffatto quando $n = 2, m = 3$.
   (b) Determinare il numero dei divisori dello zero dell'anello $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.
   (c) Provare che, se $n$ ed $m$ non sono coprimi, allora per ogni omomorfismo di gruppi $\psi : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{nm}$, si ha che $\psi^{-1}([1]_{nm}) = \varnothing$.

3. Sia $n$ un intero positivo. Per ogni $k \in \{0,1,...,n\}$, sia $\alpha_k = 2^k + i$.
   (a) Determinare un polinomio irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ che abbia tra le sue radici il numero complesso $\alpha = \prod_{k=0}^{n} \alpha_k$ .
   (b) Determinare un polinomio di $\mathbb{R}[x]$ di cui sia radice $\alpha_k$ per ogni $k \in \{0,1,...,n\}$ e che sia privo di radici reali.