

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2023/24

Appello del 25 settembre 2024

1. Si considerino in S_{20} le seguenti permutazioni:

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)(16, 17, 18, 19, 20), \\ \tau &= (1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8)(9, 11, 13, 15, 10, 12, 14)(16, 20, 19, 18, 17).\end{aligned}$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{20} : $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{20} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

- (a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.
- (b) Provare che $|C(\sigma) \cap C(\tau)| \geq 560$.
- (c) Dire se esiste un sottogruppo ciclico di S_{20} contenente $\{\sigma, \tau\}$.

2.

- (a) Determinare l'insieme degli interi $n \geq 2$ per i quali la seguente applicazione è un omomorfismo di anelli:

$$\begin{aligned}\varphi_n : \mathbb{Z}_n &\rightarrow \mathbb{Z}_{12} \\ [a]_n &\mapsto [a^4 - a^2]_{12} \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

- (b) Determinare l'insieme delle coppie ordinate di primi positivi distinti (p, q) per le quali la seguente applicazione è un omomorfismo di gruppi:

$$\begin{aligned}\psi_{p,q} : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_{pq} \\ a &\mapsto [a^{pq} - a^p - a^q]_{pq} \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

3. Dato un numero primo $p > 0$, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = \bar{1} + \sum_{i=0}^{101} x^{p^i}, \quad g(x) = \bar{1} + \sum_{i=0}^{24} x^{p^i}, \quad h(x) = \bar{1} + \sum_{i=0}^{33} x^{p^i}.$$

- (a) Determinare l'insieme dei valori di p per i quali $f(x)$ e $g(x)$ hanno in \mathbb{Z}_p una radice comune.
- (b) Determinare un valore di p per il quale $h(x)$ divide $f(x)$.