CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2008/09

Appello del 27 novembre 2009

1. Si consideri la seguente permutazione:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 9 & 11 & 13 & 8 & 2 & 10 & 1 & 5 & 7 & 6 & 12 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_{13}.$$

   Determinare $< \sigma^{3695} > \cap A_{13}$.

2. Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   (a) Provare che A è un sottoanello unitario dell'anello $M_2(\mathbb{Z})$.
   (b) Provare che l'applicazione $\varphi : A \to \mathbb{Z}_8$ tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = [a + 3b]_8,$$

   è un omomorfismo di anelli.
   (c) Determinare il nucleo $Ker\varphi$.
   (d) Dire se φ è surgettivo.

3. Dato il polinomio $f(x) = x^3 + x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$,

   (a) determinare una sua fattorizzazione,
   (b) dire se $[x]$ è invertibile in $\mathbb{Z}_5[x] / (f(x))$, e in caso affermativo determinare il suo inverso.