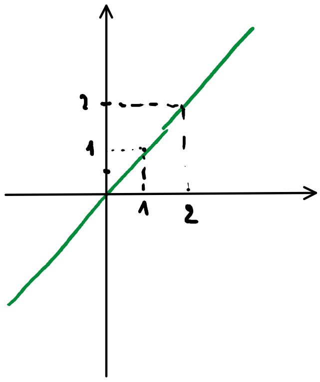
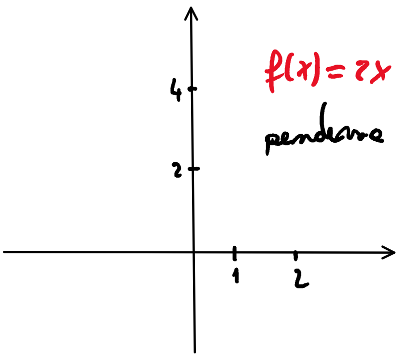
Derivate:

Possiamo immaginare la derivata di una funzione f come una nuova funzione che specifica in ogni punto la pendenza del grafico della funzione $f(x)$.



$f(x) = x$

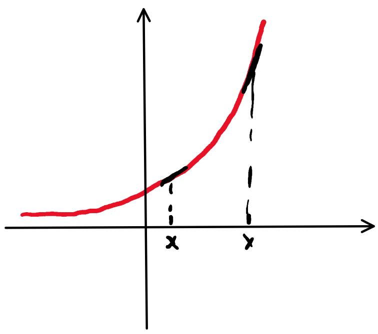
la pendenza del grafico è uguale a 1 in tutti i punti



$f(x) = 2x$

pendenza 2

La pendenza del grafico è uguale a 2 in tutti i punti



Se il grafico non è una retta la pendenza dipende dal punto x.

La derivata di una funzione è una nuova funzione che ad ogni x associa la pendenza in x della prima funzione.

La derivata di una funzione $f(x)$ si indica con $f'(x)$ o $(f(x))'$ o $\frac{d}{dx} f(x)$ o $Df(x)$.

Derivate delle funzioni elementari:

- $f(x) = 1$ $\qquad f'(x) = 0$
- $f(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = 0$
- $f(x) = x$ $\qquad f'(x) = 1$
- $f(x) = ax + b$ $\qquad f'(x) = a$
- $f(x) = x^n$ $\qquad f'(x) = n\,x^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ $\qquad f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \ln|x|$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sin x$ $\qquad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$ $\qquad f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
- $f(x) = \arctan x$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Regole di derivazione elementari

- $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$ (DERIVATA DELLA SOMMA)
- $\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x)$ (DERIVATA DELLA DIFFERENZA)
- $\left(c\,f(x)\right)' = c\,f'(x)$ (DERIVATA DI UN MULTIPLO)
- $\left(f(x)\,g(x)\right)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ (DERIVATA DEL PRODOTTO)
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$ (DERIVATA DEL QUOZIENTE)
- $\left(g(f(x))\right)' = g'(f(x))\,f'(x)$ (DERIVATA DELLA COMPOSIZIONE)

Esempi importanti di composizioni

$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} f'(x)$$
$$\left(\ln f(x)\right)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$\left(\ln |f(x)|\right)' = \frac{f'(x)}{|f(x)|}$$
$$\left(\sin(f(x))\right)' = \cos(f(x))\ f'(x)$$
$$\left(\cos f(x)\right)' = -\sin(f(x))\ f'(x).$$

ESEMPI

Derivata del prodotto
$(fg)' = f'g + fg'$

1) $h(x)\ e^x x^2$

$$h'(x) = (e^x)' x^2 + e^x (x^2)'$$
$$= e^x x^2 + e^x \cdot 2x$$
$$= e^x x^2 + 2e^x x = x e^x (x+2)$$

Derivata del quoziente
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

2) $$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{(x)' \sin x - x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$$

Derivata della composizione:
$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$

3) $$\left(e^{\sin x}\right)' = e^{\sin x} (\sin x)' = e^{\sin x} \cos x$$

4) $$\left(e^{2x}\right)' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$$

5) $$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x}(-x)' = e^{-x}(-1) = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x}$$

6) $$\left(\ln(x^2+1)\right)' = \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = \frac{2x}{x^2+1}$$

Approfondimento sulla composizione:

- Se $g(x) = e^x$ allora $g(f(x)) = e^{f(x)}$
  (da non confondere con $g(x)\, f(x) = e^x \cdot f(x)$)
- Se $g(x) = e^x$ e $f(x) = -x$ allora $g(f(x)) = e^{-x}$
- Se $g(x) = \sin x$ e $f(x) = x^2+2$ allora $g(f(x)) = \sin(x^2+2)$
  (mentre $g(x) \cdot f(x) = \sin x \cdot (x^2+2)$)
- Se $g(x) = x^2$ e $f(x) = x^3+1$ allora
  $$g(f(x)) = (x^3+1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1$$
  mentre
  $$g(x) f(x) = x^2 (x^3+1) = x^5 + x^2$$
- La composizione di due funzioni si indica anche con $g \circ f\,(x)$ cioè $g \circ f(x) = g(f(x))$

  La regola per la derivata della composizione dice che
  $$(g(f(x)))' = g'(f(x))\, f'(x)$$
  o equivalentemente
  $$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f(x) = g' \circ f(x) \cdot f'(x)$$
  Utilizzando una notazione alternativa:
  $$D(g \circ f)(x) = Dg \circ f\,(x) \cdot Df(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$$
  $$= g'(f(x)) \cdot f'(x)$$
- La funzione e^{x^2} è una composizione:
  $g(x) = e^x$, $f(x) = x^2$
  Sappiamo che $g'(x) = e^x$ quindi $g'(f(x)) = g'(x^2) = e^{x^2}$
  e $f'(x) = 2x$

e $f'(x) = 2x$

Quindi

$$(e^{x^2})' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2e^{x^2}x$$

- In generale ogni esponenziale del tipo $e^{f(x)}$ è una composizione di $g(x) = e^x$ con $f(x)$. Quindi

$$(e^{f(x)})' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{f(x)} f'(x)$$

---

7) $$(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$$

8) $$(\ln(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

9) $$\left(\frac{e^{2x}}{x^2-1}\right)' = \frac{(e^{2x})'(x^2-1) - e^{2x}(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot (x^2-1) - e^{2x}(2x-0)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2e^{2x}(x^2-1-x)}{(x^2-1)^2}$$

Nota: La derivata della derivata di una funzione si dice DERIVATA SECONDA e si indica con $f''(x)$. Ad esempio:

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = (f'(x))' = 3 \cdot 2x = 6x.$$

Integrali:

Calcolare $\int f(x)\,dx$ significa trovare tutte le funzioni che hanno per derivata $f(x)$.

Alcuni integrali elementari

$\int 1\,dx = x + C$

$\int 2\,dx = 2x + C$

$\int 2x\,dx = x^2 + C$

$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C \qquad \left(\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2x = x \right)$

$\int x^m\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + C$ vale $\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

$\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$

Tipico esercizio di esame:

Calcolare $\int \frac{x}{x^2+2x-3}\,dx$?

Esistono dei metodi per calcolare $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ quando p e q sono polinomi.

Assumiamo che $\deg(p) < \deg(q)$ e $\deg(q) = 1$ o $\deg(q) = 2$.

1° Caso $\deg(q) = 1$

$$\int \frac{c}{ax+b}\,dx = c\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{c}{a}\ln|ax+b| + K$$

(infatti: $\left(\frac{1}{a}\ln|ax+b|\right)' = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ax+b}\cdot(ax+b)'$
$$= \frac{1}{\cancel{a}}\,\frac{1}{ax+b}\cdot\cancel{a} = \frac{1}{ax+b}$$)

ESEMPI

- $\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$
- $\int \frac{1}{2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$
- $\int \frac{1}{4x+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|4x+1| + C$
- $\int \frac{3}{2x-1}\,dx = 3\int \frac{1}{2x-1}\,dx = 3\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$
  $= \frac{3}{2}\ln|2x-1| + C$
- $\int \frac{1}{\underbrace{1}_{b=1}\underbrace{-2x}_{a=-2}}\,dx = \frac{1}{-2}\ln|1-2x| + C$
- $\int \frac{1}{3x+2x+1+3}\,dx = \int \frac{1}{5x+4}\,dx = \frac{1}{5}\ln|5x+4|+C$

---

2) $\deg(q(x)) = 2$

In questo caso l'integrale è del tipo:

$$\int \frac{mx+q}{ax^2+bx+c}\,dx$$

Ci sono diversi sottocasi

1) $\Delta > 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$. In questo caso l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ha due soluzioni x_1, x_2 (si trovano con la formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$)

Il denominatore si può scomporre come:

$$ax^2+bx+c = a\underbrace{(x-x_1)}_{①}\underbrace{(x-x_2)}_{②}$$

L'idea è cercare di scrivere la frazione da integrare come somma di frazioni più semplici che hanno ① e ② al denominatore:

Si cercano, quindi, A e $B \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{mx+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

Una volta trovati A e B:

$$\int \frac{mx+q}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{A}{x-x_1}\,dx + \int \frac{B}{x-x_2}\,dx$$

$$= A\ln|x-x_1| + B\ln|x-x_2| + C.$$

ESEMPIO

$$\int \frac{x+1}{x^2+x-2}\,dx$$

x^2+x-2 $\qquad \Delta = 1+8 = 9 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Il denominatore è $x^2+x-2 = (x-1)(x-(-2))$

$= (x-1)(x+2)$

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x+1}{\underbrace{x^2+x-2}} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{\underbrace{(x-1)(x+2)}}$$

stesso denominatore perché $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

$$x+1 = A(x+2) + B(x-1)$$
$$x+1 = \underline{A}x + 2A + \underline{B}x - B$$
$$1\cdot x + 1 = \underline{(A+B)}x + \underline{2A-B}$$

$$\begin{cases} 1 = A+B \\ 1 = 2A-B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1-A \\ 2A-(1-A)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 1-A \\ 2A-1+A=1 \end{cases} \longrightarrow \quad 3A-1=1$$
$$3A = 2$$
$$A = \frac{2}{3}$$

$$B = 1-A = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{2}{3} \qquad B = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{x+2}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x-2}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + C$$

- $$\int \frac{2x-1}{3x^2-5x-2}\,dx \qquad ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\Delta = 25 - 4\cdot 3\cdot(-2) = 25+24 = 49 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \left(x - \left(-\tfrac{1}{3}\right)\right) = \left(x + \tfrac{1}{3}\right)$$

$$3x^2-5x-2 = 3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{2x-1}{3x^2-5x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+\frac{1}{3}}$$

$$\frac{2x-1}{3x^2-5x-2} = \frac{A\left(x+\frac{1}{3}\right) + B(x-2)}{(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}$$

Attenzione! I denominatori non sono uguali perché $3x^2-5x-2 = 3(x-2)(x+\frac{1}{3})$

Non c'è nella frazione a destra

$$\frac{2x-1}{3x^2-5x-2} = \frac{A(x+\frac{1}{3})+B(x-2)}{(x-2)(x+\frac{1}{3})}\cdot\frac{3}{3}$$

$$\frac{2x-1}{\cancel{3x^2-5x-2}} = \frac{3A(x+\frac{1}{3})+3B(x-2)}{\cancel{3(x-2)(x+\frac{1}{3})}}$$

$$2x-1 = 3Ax + A + 3Bx - 6B$$

$$2x-1 = (3A+3B)x + (A-6B)$$

$$\begin{cases} 3A+3B=2 \\ A-6B=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3A+3B=2 \; * \\ A=6B-1 \end{cases}$$

$$* \quad 3(6B-1)+3B = 2$$
$$18B-3+3B=2$$
$$21B=5$$
$$B=\frac{5}{21}$$

$$A = 6B-1 = \frac{30}{21}-1 = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$A=\frac{3}{7} \qquad B=\frac{5}{21}$$

$$\int\frac{2x-1}{3x^2-5x-2}dx = \frac{3}{7}\int\frac{1}{x-2}dx + \frac{5}{21}\int\frac{1}{x+\frac{1}{3}}dx$$
$$= \frac{3}{7}\ln|x-2| + \frac{5}{21}\ln|x+\tfrac{1}{3}| + C.$$

Per evitare il problema dei denominatori diversi si può moltiplicare uno dei due fattori per a nella scomposizione

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = (ax-ax_1)(x-x_2)$$

Si possono cercare poi A e B tali che

$$\frac{mx+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{ax-ax_1}+\frac{B}{x-x_2}$$

Ad esempio, nell'esercizio precedente:

$$3x^2-5x-2 = 3(x-2)(x+\tfrac{1}{3}) = (x-2)(3x+1)$$

$$\frac{2x-1}{3x^2-5x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{3x+1}$$

$$= \frac{A(3x+1)+B(x-2)}{(x-2)(3x+1)}$$

$$2x-1 = A(3x+1)+B(x-2) \qquad 3Ax+A+Bx-2B$$

$$= x(3A+B)+A-2B$$

$$\begin{cases} 3A+B=2 \\ A-2B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2B-1)+B=2 \; * \\ A=2B-1 \end{cases}$$

$$* \quad 6B-3+B=2$$

$$7B=5$$

$$B=\frac{5}{7}$$

$$A=2B-1=\frac{10}{7}-1=\frac{3}{7}$$

$$\int \frac{2x-1}{3x^2-5x-2}\,dx = \frac{3}{7}\int\frac{1}{x-2}\,dx + \frac{5}{7}\int\frac{1}{3x+1}\,dx$$

$$= \frac{3}{7}\ln|x-2| + \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$$

$$= \frac{3}{7}\ln|x-2| + \frac{5}{21}\ln|3x+1| + C$$

Si noti che:

$$\frac{5}{21}\ln|3x+1|+C = \frac{5}{21}\ln 3\left|x+\frac{1}{3}\right| + C$$

$$= \underbrace{\frac{5}{21}\ln 3}_{\text{costante}} + \frac{5}{21}\ln\left|x+\frac{1}{3}\right| + C$$

$$= \frac{5}{21}\ln\left|x+\frac{1}{3}\right| + C_2$$

quindi il risultato coincide con quello trovato prima

ESERCIZIO

$$\int \frac{x}{2x^2+x-1}\,dx$$

$$\Delta = 1+8 = 9$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$2x^2+x-1 = 2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right) = (x+1)(2x-1)$$

$$\frac{x}{2x^2+x-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}$$

$$= \frac{A(2x-1)+B(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$$

$$x = A(2x-1) + B(x+1)$$

$$x = 2Ax - A + Bx + B$$

$$\underline{x} = x\underline{(2A+B)} - A + B$$

$$\begin{cases} 2A+B = 1 \\ -A+B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2A+A = 1 \\ B = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A = 1 \\ B = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{2x^2+x-1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{2x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|2x-1| + C$$

2) $\Delta = 0$. In questo caso l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ha una sola soluzione $x_1 = -\frac{b}{2a}$

Il denominatore si può scomporre come:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$$

Si cercano A e B t.c.

$$\frac{mx+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2}$$

L'integrale si riduce a

$$A\int \frac{1}{x-x_1}\,dx + B\int \frac{1}{(x-x_1)^2}\,dx$$

$$= A\ln|x-x_1| + B\left(-\frac{1}{(x-x_1)}\right) + c$$

$$= A\ln|x-x_1| - \frac{B}{(x-x_1)} + c$$

Nota: Per il secondo termine bisogna ricordare che $\int \frac{1}{(x-x_1)^2}\,dx = -\frac{1}{x-x_1} + c$

Infatti:

$$\left(-\frac{1}{x-x_1}\right)' = \left(-(x-x_1)^{-1}\right)' = -(-1)(x-x_1)^{-2}\cdot 1$$

$$= (x-x_1)^{-2} = \frac{1}{(x-x_1)^2}$$

OSS

Se $a \neq 1$ e $a > 0$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$$
$$= (\sqrt{a}\,x - \sqrt{a}\,x_1)^2$$

Ad esempio

$$4(x-3)^2 = 2^2(x-3)^2$$
$$= (2x-6)^2$$

$$3\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

La scomposizione diventa:

$$\frac{A}{(\sqrt{a}\,x - \sqrt{a}\,x_1)} + \frac{B}{(\sqrt{a}\,x - \sqrt{a}\,x_1)^2}$$

e $$\int \frac{1}{(\sqrt{a}\,x - x_1)^2}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{\sqrt{a}\,x - \sqrt{a}\,x_1} + c$$

ESEMPIO

$$\int \frac{x}{4x^2+4x+1}\,dx$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0 \qquad x_1 = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$4x^2+4x+1 = 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 2^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= (2x+1)^2$$

$$\frac{x}{4x^2+4x+1} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2}$$
$$= \frac{A(2x+1)+B}{(2x+1)^2}$$

$$x = A(2x+1) + B$$
$$x = 2Ax + A + B$$
$$\left\{\begin{array}{l} 2A = 1 \\ A + B = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

$$\int \frac{x}{4x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x+1}\right) + C$$
$$= \frac{1}{4}\ln|2x+1| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x+1} + C$$