Esercizio

Trovare la rappresentazione algebrica, il complesso coniugato e il modulo di

$$z = \frac{1+2i}{1+3i}.$$

Bisogna scrivere $z \in \mathbb{C}$

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z), \quad (i^2 = -1)$$

Usiamo il prodotto notevole

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $(1-3i)$

$$\frac{(1+2i)}{1+3i} \cdot \frac{(1-3i)}{(1-3i)} = \frac{1-3i+2i-6i^2}{1-(3i)^2} =$$

$$= \frac{1-3i+2i-(6)(-1)}{1-9(-1)} = \frac{1-i+6}{1+9} =$$

$$= \frac{7-i}{10} = \underbrace{\frac{7}{10}}_{Re(z)} - \underbrace{\frac{1}{10}}_{Im(z)} i$$

$$\boxed{\begin{aligned} z &= Re(z) + i\,Im(z) \\ \bar{z} &= Re(z) - Im(z) \\ |z| &= \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \end{aligned}}$$

Allora

$$z = \frac{7}{10} - \frac{1}{10} i$$

$$\bar{z} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10} i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Determinare rappresentazione algebrica, coniugato e modulo di:

$$z = \frac{1-i}{1+i}$$

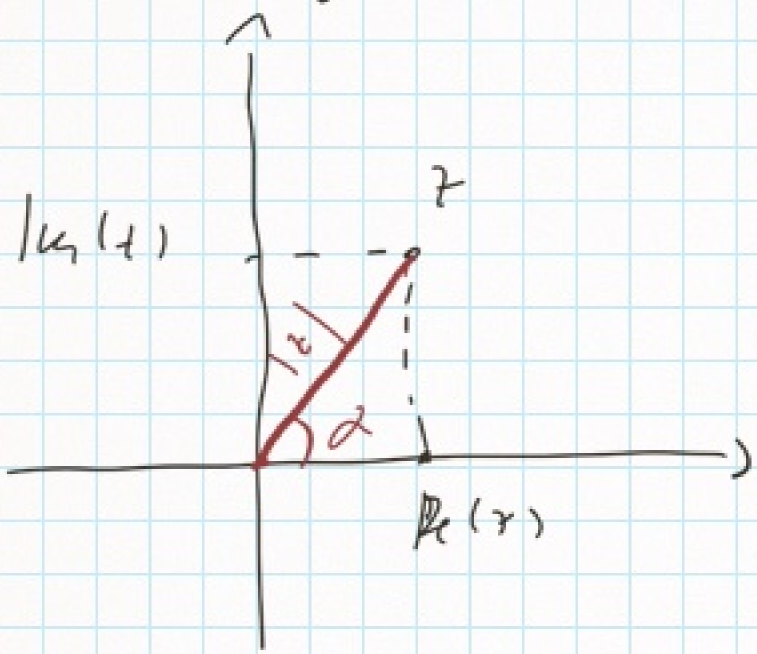
$$z = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+(i)^2-2i}{1-i^2} = \frac{\cancel{1}\cancel{-1}-2i}{1-(-1)} =$$

$$= \frac{-2i}{2} = -i$$

$\mathrm{Re}(z) = 0 \qquad \mathrm{Im}(z) = -1$

$\bar{z} = i \quad , \quad |z| = 1$

Rappresentazione geometrica di un numero complesso



$$z = \underbrace{Re(z) + i\,Im(z)}$$

- $Re(z) = |z| \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{Re(z)}{|z|}$

  $Im(z) = |z| \cdot \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{Im(z)}{|z|}$

$$z = Re(z) + i\,Im(z) = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

<u>oss</u> Se $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$z' = |z'|(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$

$z = z' \iff |z| = |z'|$ e $\alpha = \alpha' + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Rappresentazione esponenziale

Sia

$$z = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha).$$

Chiamiamo $\cos\alpha + i \sin\alpha =\cdot e^{i\alpha}$

Allora

$$\boxed{z = |z| \cdot e^{i\alpha}}$$

Esempio

$$z = \frac{1+i}{1-i}$$

Scrivere forma algebrica, trigonometrica e esponenziale di z.

FORMA ALGEBRICA DI

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{\cancel{1}+2i-\cancel{1}}{1-(-1)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$Re(z) = 0 \quad Im(z) = 1$$

$$|z| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$$

FORMA TRIGONOMETRICA

$$\alpha \in [0, 2\pi]$$

$$z = |z|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{0}{1} = 0 \\ \sin\alpha &= \frac{Im\, z}{|z|} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$z = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$$

Rappresentazione esponenziale

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$\sim \quad \sim$

Sia $z = 1 + i$

TROVARE FORMA TRIGONOMETRICA E ESPONENZIALE

$$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad Im(z) = 1 \qquad Re(z) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\alpha &= \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Forma esponenziale

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Se $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$z' = |z'|(\cos\beta + i\sin\beta)$

Allora

$$z \cdot z' = |z|\,|z'|\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right)$$

In generale

$$z^n = |z|^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

Esempio

$$z = 1 - i \quad (*)$$

Calcolare z^{15}

Scriviamo z in forma trigonometrica

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$Re(z) = 1, \quad Im(z) = -1$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

Allora

$$\boxed{z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right)} \quad (*)$$

Da qui

$$z^{15} = \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left(\cos \frac{7 \cdot 15}{4}\pi + i \sin \left(\frac{7 \cdot 15}{4}\right)\pi\right)$$

RADICI n-sime di un numero complesso

DEF. Sia $w \in \mathbb{C}$

Si dice RADICE n-sima di w ogni $z \in \mathbb{C}$

t.c. $z^n = w$

Le n-radici n-sime DISTINTE DI w

si calcolano attraverso la formula :

Sia $w = |w|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$

Allora $\forall k = 0, \dots, n-1$

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

ESEMPIO

Trovare le soluzioni di

$$z^4 + 4 = 0$$

$$z^4 = -4$$

Devo calcolare le 4 RADICI QUARTE DISTINTE DI $w = -4$

Occorre scrivere $w = -4$ in forma trigonometrica

$|w| = 4 \qquad Im(w) = 0 \qquad Re(w) = -4$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{Re(w)}{|w|} = -1 \\ \sin\alpha &= \frac{Im(w)}{|w|} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \pi$$

Allora

$w = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$|w| = 4$$

Allora

$$\alpha = \pi$$

$$z_k = \sqrt[4]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{4}\right)\right)$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

Di qui

$$z_0 = \sqrt[4]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi + 0}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 0}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2^2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i$$

$$z_1 = \sqrt[4]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[4]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1+i$$

Per simmetria

$z_3 = -1-i$

$z_4 = 1-i$

Risolvere la seguente equazione

$$z^3 = \underbrace{(1+i)^5}_{\text{SCRIVERE IN FORMA TRIGONOMETRICA}}$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^5 = \underbrace{(\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)}_{\text{POTENZA DI } (1+i)}$$

Dobbiamo trovare le 3 RADICI TERZE DISTINTE DI

$$w = 2^{\frac{5}{2}}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

$$z_k = \sqrt[3]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi}{3}\right)\right)$$

$$k = 0, 1, 2$$

Allora

$$z_0 = 2^{\frac{5}{6}}\left(\cos\left(\frac{\frac{5}{4}\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5}{4}\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^{\frac{5}{6}}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

$$z_1 = 2^{\frac{5}{6}}\left(\cos\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^{\frac{5}{6}}\left(\cos\frac{13}{12}\pi + i\sin\left(\frac{13}{12}\pi\right)\right)$$

$$z_2 = 2^{\frac{5}{6}}\left(\cos\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 4\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^{\frac{5}{6}}\left(\cos\left(\frac{21}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{21}{12}\pi\right)\right)$$

Appello del 23 - 02 - 24

Dato il numero complesso

$$\omega = \frac{3+i}{1-i}$$

(1) calcolare la forma algebrica di ω;

(2) calcolare $(\omega - 3i)^3$.

SVOLGIMENTO

$$w = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} =$$

$$= \frac{3+3i+i-1}{1-(-1)} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$$

Allora $w = 1+2i$.

Per la seconda domanda, occorre calcolare

$$(w-3i)^9$$

Calcolo $w-3i = 1+2i-3i = 1-i$

Occorre scrivere $1-i$ in forma trigonometrica (già fatto)

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right)$$

Allora

$$(1-i)^9 = 2^{\frac{9}{2}}\left(\cos \frac{9 \cdot 7}{4}\pi + i \sin \frac{9 \cdot 7}{4}\pi\right) =$$

$$= 2^{\frac{9}{3}}\left(\cos\left(\frac{63}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{63}{4}\pi\right)\right)$$

Appello del 20-01-23

Dato il numero complesso

$$w = \frac{3-2i}{2+3i}$$

(1) calcolare la sua forma algebrica

(2) calcolare le sue radici cubiche
(risolvere l'equazione $z^3 = w$)

Svolgimento:

$$w = \frac{3-2i}{2+3i} = \frac{(3-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{\cancel{6}-9i-4i-\cancel{6}}{4-(-9)}$$

$$= -\frac{13i}{13} = -i$$

Dobbiamo trovare le soluzioni di

$$z^3 = -i$$

Occorre scrivere $-i$ in forma trigonometrica

$Re(-i) = 0 \qquad Im(-i) = 1$

$|-i| = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\pi$$

$$-i = \left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$z_k = \underbrace{\sqrt[3]{|1-i|}}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} \left(\cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} + i \sin\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}\right)\right)$$

$$k = 0,\ 1,\ 2$$

Allora

$$z_0 = \cos\left(\frac{\frac{3}{2}\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{3}{2}\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0 + i = i$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i .$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Appello del 13-04-23

Sia $w = \dfrac{8+i}{2-3i}$

(1) Scrivere la forma algebrica di w

[$w = 1+2i$]

(2) Calcolare $(w-1)^6$

$$(w-1)^6 = (1+2i-1)^6 = (2i)^6 = 2^6 \cdot (i^6) =$$

$$2^6(-1)^3 = -2^6$$