CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2014/15

Appello del 19 giugno 2015

1. Siano date in S_{11} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3,4,5)(6,7,8)(9,10,11)$$
$$\tau = (1,2,3)(4,5)(6,9,7,10,8,11)$$

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.

(b) Provare che ogni sottogruppo di S_{11} contenente $\langle\sigma\rangle \cup \langle\tau\rangle$ contiene un sottogruppo di ordine 9.

(c) Provare che ad ogni sottogruppo del punto (b) appartiene un elemento di periodo 4.

2. Determinare tutti gli interi n per i quali il numero

$$n^{180} - n^{20} - n^{36} + 1$$

è divisibile per 209.

3. Dato un numero primo $p > 2$, sia $f(x) = x^{p-2} + x + 2$.

(a) Provare che la riduzione di $f(x)$ modulo p ha in $\mathbb{Z}_p$ una sola radice.

(b) Per $p = 5$, determinare la fattorizzazione della riduzione di $f(x)$ modulo 5.

(c) Provare che, per ogni p, la radice del punto (a) è semplice.

(Suggerimento: procedere per assurdo, dimostrando che se la radice è multipla per la riduzione di $f(x)$ modulo p, allora la stessa radice è multipla per la riduzione modulo p del polinomio $x^3 + 2x^2 - 1$.)