

Esercizio 1

Enunciato del teorema del limite centrale

Se $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con media $\mu = E[X_1]$ e varianze finite $\sigma^2 = \text{Var}[X_1]$, allora

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \text{ tende in legge a } N(0,1)$$

dove $N(0,1)$ è la distribuzione normale standard; con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq t \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$n=30$

Chiamiamo X_i la v.a. che dà la durata dell' i -esima operazione elementare.

$$\begin{aligned} \text{Si ha } E[X_i] &= 1 \text{ min} \quad \text{e} \quad \sigma = 5 \text{ s} = \frac{1}{12} \text{ min} \\ &\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{144} \text{ min}^2 \end{aligned}$$

$$X = \sum_{i=1}^{30} X_i$$

$$E[X] = 30 E[X_i] = 30 \text{ min}$$

$$\text{Var}[X] = 30 \text{ Var}[X_i] = \left(30 \cdot \frac{1}{144} \right) \text{ min}^2 = \frac{30}{144} \approx 0.208 \text{ min}^2$$

$$\sigma[X] = 0.4564 \text{ min}$$

↑
deviazione
standard

Esercizio 2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a^2} x & \text{se } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. f è una densità, perché $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e inoltre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^a \frac{2}{a^2} x dx = \frac{2}{a^2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{2} = 1$$

$$2. E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{2}{a^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{2}{a^2} \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a$$

3. Dato che $a = \frac{3}{2} E[X]$, segue che $\frac{3}{2} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

è uno stimatore corretto di a

4. Le densità congiunte del campione $\vec{x}$ date da

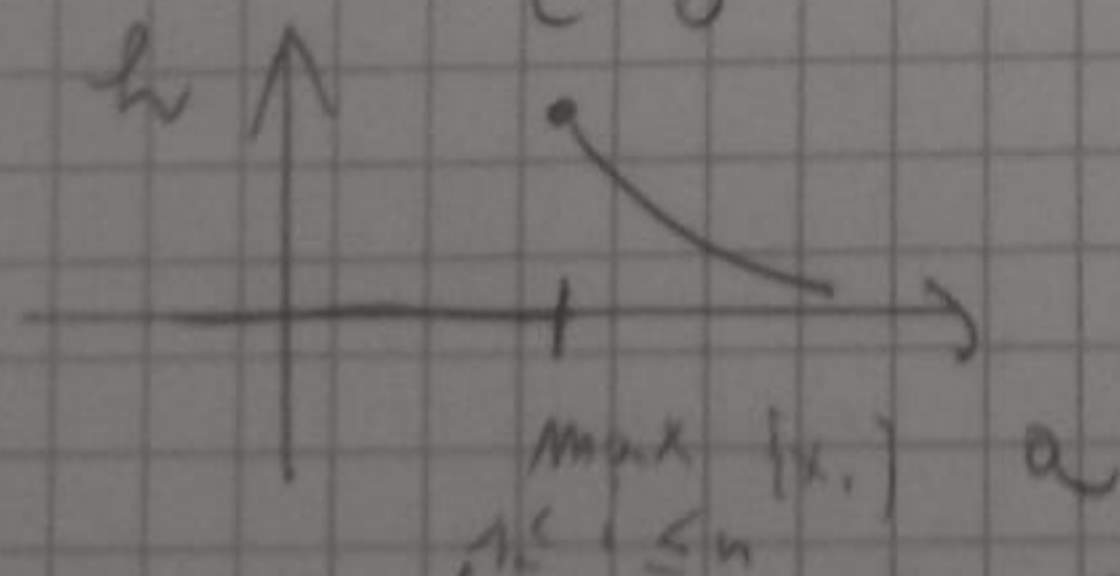
$$h(x_1, x_2, \dots, x_n; a) = \begin{cases} \frac{2^n}{a^{2n}} x_1 x_2 \dots x_n & \text{se } 0 \leq x_i \leq a \quad i=1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la condizione $a \geq x_i \quad \forall i=1, 2, \dots, n$ si scrive come

$$a \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$$

ovvero

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n, a) = \begin{cases} \frac{2^n}{a^{2n}} x_1 \dots x_n & \text{se } a \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} \\ 0 & \text{se } a < \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} \end{cases}$$



Come si vede in figura, le f.e. h è massima per

$$a = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$$

Lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{a}$ dunque

$$\hat{a} = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$$

Esercizio 3

$$n=10$$

$$\bar{X} = 113 \text{ ppm}$$

$$S^2 = 98 \text{ ppm}^2$$

$$S = 9.8995 \text{ ppm}$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0 = 100 \text{ ppm}$$

Dato che la varianza σ^2 non è nota, occorre condurre un test di Student. ~~Il modello è di tipo~~

L'ipotesi nulla H_0 esprime con una sola disuguaglianza; si tratta, pertanto, di un test unilaterale.

Si usa la statistica

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{113 - 100}{\frac{9.8995}{\sqrt{10}}} = 4.15$$

$$\text{Si rifiuta } H_0 \text{ se } T < -t_{1-\alpha}(n-1)$$

$\uparrow$ quantile di Student

Dato che $T > 0$, si accetta H_0 ad ogni livello di significatività α