MATEMATICA - LEZIONE 19

mercoledì 8 novembre 2023 09:06

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $x_0 \in A \cap D(A)$. Si dice che f è **DERIVABILE** in x_0 se esiste finito il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. In tal caso tale limite si dice **DERIVATA** di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Indicando con x il punto in cui calcoliamo f':

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivate di alcune funzioni elementari:

$$(c)' = 0$$
$$(x)' = 1$$
$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(|x|)' = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} = \frac{|x|}{x} \quad \text{se } x \neq 0.$$

ESEMPI

- $(x^7)' = 7x^6$
- $\frac{d}{dx} x^{-4} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

Si ricordi che la derivata si indica anche con $\frac{d}{dx}$
$\frac{d}{dx} x^{-4} = (x^{-4})'$

- $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$] DA RICORDARE
- $\frac{d}{dx}\sqrt[5]{x} = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

TEOREMA (OPERAZIONI TRA DERIVATE)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, siano $f, g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni e sia $x_0 \in A \cap D_r(A)$. Se f e g sono derivabili in x_0, allora:

1) $f+g$ è derivabile in x_0 e
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2) $f-g$ è derivabile in x_0 e:
$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

3) $\forall c \in \mathbb{R}$ cf è derivabile in x_0 e
$$(cf)'(x_0) = c f'(x_0)$$

4) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

5) Se $g(x_0) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

6) Se $g(x_0) \neq 0$ allora $\frac{1}{g}$ è derivabile in x_0 e
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

DIM

1) $$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

4) $$\lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow{x\to x_0} f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\xrightarrow{x\to x_0} g(x_0)} + f(x_0) \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} g'(x_0)$$

perché g è derivabile in x_0 quindi continua in x_0

$$= f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

2), 3) e 5) si dimostrano in modo simile. 6) è un caso particolare di 5).

Regole da ricordare:

- $(f+g)' = f'+g'$
- $(f-g)' = f'-g'$
- $(cf)' = cf' \quad \forall c\in\mathbb{R}$
- $(fg)' = f'g+fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$
- $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{1}{g^2}$

ESEMPI

1) $\frac{d}{dx} 5x^2 = 5 \frac{d}{dx} x^2 = 5 \cdot 2x = 10x$

2) $\frac{d}{dx} x^3 + 4x^2 + 6x - 3 = 3x^2 + 4 \cdot 2x + 6 \cdot 1 + 0$

$= 3x^2 + 8x + 6.$

3) $\frac{d}{dx} \sqrt{x} + e^x = \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x$

4) $\frac{d}{dx} x \sin x = 1 \cdot \sin x + x \cos x$

$= \operatorname{sen} x + x \cos x$

$(fg)' = f'g + fg'$

5) $\frac{d}{dx} \frac{3x^2-1}{4x^5+1} = \frac{6x(4x^5+1) - (20x^4+0)(3x^2-1)}{(4x^5+1)^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$= \frac{24x^6 + 6x - 60x^6 + 20x^4}{(4x^5+1)^2}$

$= \frac{-36x^6 + 20x^4 + 6x}{(4x^5+1)^2}$

6) $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

(oppure $\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$)

Ricordare

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

TEOREMA (DERIVATA DI UNA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI)

Siano A, B due insiemi e siano $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A \cap D_i(A)$ tale che $f(x_0) \in B \cap D_i(B)$. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$ allora $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$.

Cioè:

$$\big(g(f(x))\big)' = g'(f(x))\, f'(x).$$

ESEMPI

1) $\frac{d}{dx} e^{3x^2}$

$e^{3x^2} = g(f(x))$ dove

$g(x) = e^x \quad , \quad f(x) = 3x^2$

$g'(x) = e^x \qquad f'(x) = 6x$

$g'(f(x)) = e^{3x^2}$

Quindi

$$\frac{d}{dx} e^{3x^2} = e^{3x^2} \cdot 6x$$

Più in generale:

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)$$

2) $\frac{d}{dx} e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$

3) $\frac{d}{dx} e^{-x} = e^{-x}(-1) = -e^{-x}.$

4) $\left(e^{x^2-x}\right)' = e^{x^2-x} \cdot (x^2-x)'$

$= e^{x^2-x}(2x-1).$

5) $\frac{d}{dx} \sin(\sqrt{x})$

$$\sin(\sqrt{x}) = g(f(x))$$

$g(x) = \sin x$, $\quad f(x) = \sqrt{x}$

$g'(x) = \cos x \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g'(\sqrt{x}) = \cos(\sqrt{x})$

Quindi:

$$\frac{d}{dx} \sin(\sqrt{x}) = \cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

6) $\frac{d}{dx} \cos(e^x) = -\sin(e^x) \cdot e^x.$

7) $\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \cdot (x^2+x+1)' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

8) $\frac{d}{dx} \cos^5 x = 5\cos^4 x \ (\cos x)' = -5\cos^4 x \sin x.$

9) $\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{\log(a^x)} = \frac{d}{dx} e^{x \log a} = e^{x \log a} (x \log a)'$

$= e^{x \log a} \log a$

$= a^x \log a$

Ricordare

$$\boxed{\frac{d}{dx} a^x = a^x \log a}$$

10) $\frac{d}{dx} \sqrt[3]{4x^2 - x + 1}$

$$\left((\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right)$$

$= \frac{1}{3\sqrt[3]{(4x^2-x+1)^2}} \cdot (4x^2 - x + 1)'$

$$= \frac{8x - 1}{3\sqrt[3]{(4x^2 - x + 1)^2}}$$

ESEMPI DI RIEPILOGO

1) $$\left(x^8 + e^{\frac{1}{x}}\right)' = 8x^7 + e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' = 8x^7 + e^{\frac{1}{x}}\left(-x^{-2}\right)$$
$$= 8x^7 - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

2) $$\left(x^2 \tan(2x)\right)' = 2x \tan(2x) + x^2 \left(\tan(2x)\right)'$$
$$= 2x \tan(2x) + x^2 \frac{1}{\cos^2(2x)} \cdot 2$$
$$= 2x \tan(2x) + \frac{2x^2}{\cos^2(2x)}.$$

3) $$\left(\sin x \, e^{-x^3}\right)' = \cos x \cdot e^{-x^3} + \sin x \, e^{-x^3} \cdot (-3x^2)$$
$$= \cos x \cdot e^{-x^3} - 3 \sin x \, e^{-x^3} x^2.$$

OSS

$$\left(f(x)\, g(x)\, h(x)\right)' = \left(\left(f(x) \cdot g(x)\right) \cdot h(x)\right)'$$
$$= \left(f(x)\, g(x)\right)' h(x) + f(x) g(x)\, h'(x)$$
$$= \left(f'(x) g(x) + f(x)\, g'(x)\right) h(x) + f(x) g(x)\, h'(x)$$
$$= f'(x) g(x) h(x) + f(x)\, g'(x)\, h(x) + f(x)\, g(x)\, h'(x)$$

- $$\left(x \cos x \cdot e^{-x}\right)' = 1 \cdot \cos x \, e^{-x} + x(-\sin x)\, e^{-x} + x \cos x \, e^{-x} \cdot (-1)$$
$$= \cos x \, e^{-x} - x \sin x \, e^{-x} - x \cos x \, e^{-x}.$$

$$\left(\sqrt{x+e^{x^3-x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+e^{x^3-x}}}\cdot\left(x+e^{x^3-x}\right)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+e^{x^3-x}}}\left(1+e^{x^3-x}\cdot(3x^2-1)\right)$$

$$= \frac{1+e^{x^3-x}(3x^2-1)}{2\sqrt{x+e^{x^3-x}}}$$

TEOREMA (DERIVATA DELLE FUNZIONI INVERSE)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Sia $f: I \to f(I)$ biettiva.
Sia $f^{-1}: f(I) \to I$ l'inversa di f.
Sia $x_0 \in I$. Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$
allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Nota:
Spesso conviene scrivere la formula come:

$$f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x_0))}.$$

ESEMPIO 1

$f(x) = \log x$

$f^{-1}(x) = e^x$

$(f^{-1})'(x) = e^x$

$(f^{-1})'(f(x)) = e^{f(x)} = e^{\log x} = x$

Quindi

$f'(x) = \frac{1}{x}$

Ricordare

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$$

ESEMPIO 2

$f(x) = \arctan x$

$f^{-1}(x) = \tan x$

$(f^{-1})'(x) = 1 + \tan^2 x$

$(f^{-1})'(f(x)) = 1 + \tan^2(\arctan x)$

$= 1 + x^2$

Quindi:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Ricordare:

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

ESEMPIO 3

$f(x) = \arcsin x$

$f^{-1}(x) = \sin x \quad , \quad (f^{-1})'(x) = \cos x$

$(f^{-1})'(f(x)) = \cos(\arcsin x)$

Siccome $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\forall x \in [-1,1]$ possiamo dire che

$(f^{-1})'(f(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$

$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

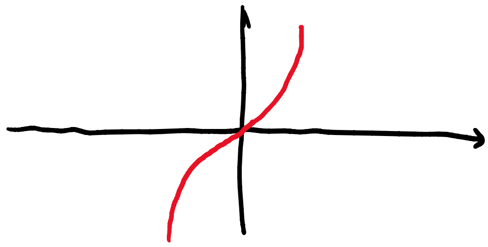
$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

Se $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ allora

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

Se $x \in (-1, 1)$, allora

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



Si può dimostrare che f non è derivabile in -1 e in 1.

Ricordare

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

In modo simile:

Ricordare

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

OSS 1

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{d}{dx} \frac{\log x}{\log a} = \frac{d}{dx} \frac{1}{\log a} \cdot \log x = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log a}$$

OSS 2

$$\frac{d}{dx} \log|x| = \frac{1}{|x|} \cdot (|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

ESERCIZIO

1) Calcoliamo la derivata di $\dfrac{x^3}{\log x}$.

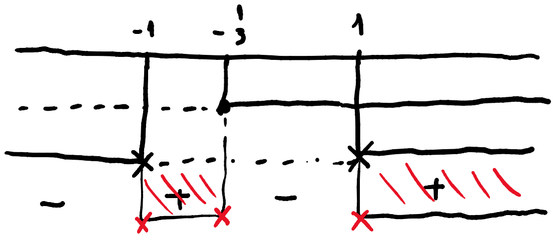
$$\left(\frac{x^3}{\log x}\right)' = \frac{3x^2 \log x - x^3 \cdot \frac{1}{x}}{\log^2 x} = \frac{3x^2 \log x - x^2}{\log^2 x}$$

2) Sia $f(x) = \log\left(\dfrac{3x+1}{x^2-1}\right)$.
Determinare il dominio e calcolare la derivata.

Dom(f):

$$\begin{cases} \dfrac{3x+1}{x^2-1} > 0 \\ x^2-1 \neq 0. \end{cases} \longleftrightarrow \quad x \neq \pm 1 \quad (x \neq 1 \ \wedge \ x \neq -1)$$

$$\frac{3x+1}{x^2-1} > 0$$



$$-1 < x < -\frac{1}{3} \ \vee \ x > 1.$$

$$\text{Dom}(f) = \left(-1, -\tfrac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty).$$

Derivata:

$$f(x) = \log\left(\frac{3x+1}{x^2-1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{3x+1}{x^2-1}} \cdot \left(\frac{3x+1}{x^2-1}\right)' = \frac{\cancel{x^2-1}}{3x+1} \cdot \frac{3(x^2-1) - (3x+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{3x^2 - 3 \quad - 6x^2 - 2x}{(3x+1)(x^2-1)} = \frac{-3x^2 - 2x - 3}{(3x+1)(x^2-1)}$$

$$= -\frac{3x^2+2x+3}{(3x+1)(x^2-1)}.$$