MATEMATICA - LEZIONE 23

mercoledì 15 novembre 2023 09:04

Metodo per calcolare limiti del tipo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ nel caso in cui ci sia una forma indeterminata del tipo:
$\frac{0}{0}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$ o $\frac{-\infty}{-\infty}$.

TEOREMA (DI DE L'HÔPITAL)

Siano $a, b \in \mathbb{R}^*$ con $a < b$. Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a, b). Assumiamo che:

1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$

(oppure $\lim_{x \to a^+} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$ e $\lim_{x \to a^+} g(x) \in \{+\infty, -\infty\}$)

2) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}^*$

Allora $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$ e $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ $\left(= \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$

Nota: Il teorema vale anche per $\lim_{x \to b^-}$ o per $\lim_{x \to x_0}$ dove $x_0 \in (a, b)$.

ESEMPI

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1 - x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'}{(1-x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{-1}$

$= \lim_{x \to +\infty} -e^x = -\infty$

2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 4x - 5}$ f.i. $\frac{0}{0}$

$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{2x}{3x^2 + 4} = \frac{2}{7}$

Utilizzando il teorema di D.L.H possiamo verificare i limiti notevoli:

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$

Può capitare di dover applicare il teorema più volte.

5) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2(e^x - 1) \cdot e^x}$ $\quad \frac{0}{0}$ possiamo applicare di nuovo il teorema

$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2(e^x \cdot e^x + (e^x - 1) e^x)} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$

6) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1 + e^x)}{x + \sqrt{x}}$ $\quad$ f.i. $\frac{+\infty}{+\infty}$

$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+e^x} \cdot e^x}{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1+e^x}$ $\quad$ f.i. $\frac{+\infty}{+\infty}$

$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1.$

7) $\lim_{x \to 0^+} x \log x$ $\quad 0 \cdot (-\infty)$ $\quad$ f.i.

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$ $\quad \frac{-\infty}{+\infty}$

$$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} \cdot x^2 = \lim_{x \to 0^+} -x = 0.$$

<u>Nota</u>: In questo caso si poteva utilizzare la gerarchia degli infiniti dopo una sostituzione.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \to +\infty} \frac{\log \frac{1}{y}}{y} = -\lim_{y \to +\infty} \frac{\log y}{y} = 0$$

<u>Attenzione</u>: Il teorema NON si può applicare se non ci sono forme indeterminate del tipo $\left(\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

ESEMPIO

$f(x) = \sin x \quad , \quad g(x) = x$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0$$

Mentre

$$\lim_{x \to \pi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \to \pi} \cos x = -1$$

I limiti sono diversi perché il teorema non si può applicare.

<u>Nota</u>: Non ci sono restrizioni su x_0, solo sul tipo di forma indeterminata.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \qquad f.i. \ \frac{0}{0}$$

$$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{1} = -\sin \frac{\pi}{2} = -1.$$

Attenzione: Il teorema non si può applicare se $\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ESEMPIO

$f(x) = x + \sin x$

$g(x) = x$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\cos x}{1} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \cos x \quad \nexists$$

Ma

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{f.i. } \frac{+\infty}{+\infty} \qquad \left(\begin{array}{l} f(x) = x + \sin x \\ \geq x - 1 \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty \end{array} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1$$

Applicazione allo studio della derivabilità.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se f è continua in x_0, questo limite è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$

Questo fatto si può usare quando abbiamo una funzione derivabile in $(a, b) \setminus \{x_0\}$ di cui vogliamo studiare la derivabilità in x_0.

ESEMPIO

$f(x) = |x|$

Sappiamo che f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

È derivabile in 0?

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1.$$

Quindi f non è derivabile in 0.

- ESEMPIO

$f(x) = \arcsin x$ $\qquad$ $\mathrm{Dom}(f) = [-1, 1]$

Abbiamo detto che f è derivabile in $(-1,1)$ e

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

È derivabile in 1?

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 1^-} f'(x)$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

f non è derivabile in $x=1$.

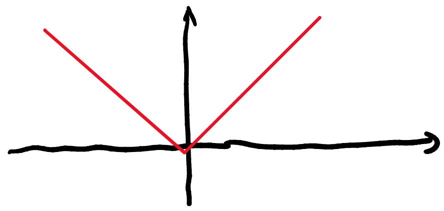
- In generale se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile in $(a,b)\setminus\{x_0\}$ e continua in (a,b) possiamo definire

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} f'(x).$$

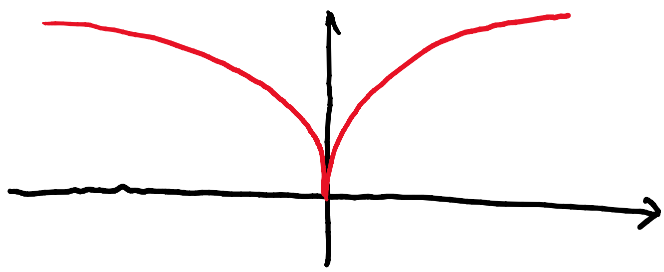
- Se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$ allora f è derivabile in x_0.

- Se $f'_+(x_0), f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$ ma $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ si dice che in x_0 c'è un PUNTO ANGOLOSO.



Ad esempio $f(x) = |x|$ ha un punto angoloso in $x = 0$

- Se $f'_+(x_0), f'_-(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$ e $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ si dice che in x_0 c'è un PUNTO DI CUSPIDE



$f(x) = \sqrt{|x|}$

f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

e $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{|x|}} \cdot \dfrac{|x|}{x}$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{|x|}}{x}$$

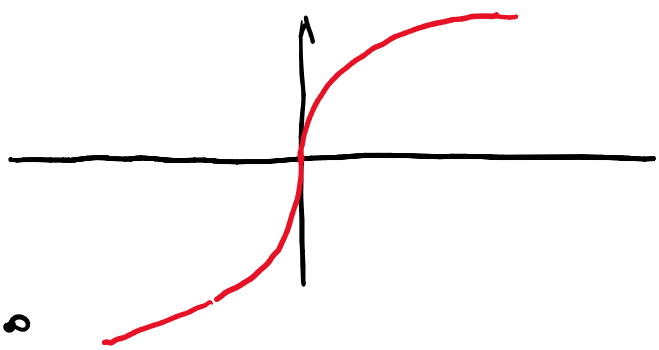
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}\frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-x}}{-x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-x}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0^+} = -\infty$$

$x = 0$ è un punto di cuspide.

- Se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$ dice che x_0 è un PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

e $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

e $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

Nota: Negli esempi precedenti x_0 è un punto interno ad (a, b). Se f è definita in $[a,b]$, continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) si può studiare la derivabilità negli estremi.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to a^+} f'(x)$$

$$f'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to b^-} f'(x)$$

ESERCIZIO

Studiare il grafico di $f(x) = \arctan(x e^{-x})$.

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- Simmetrie:

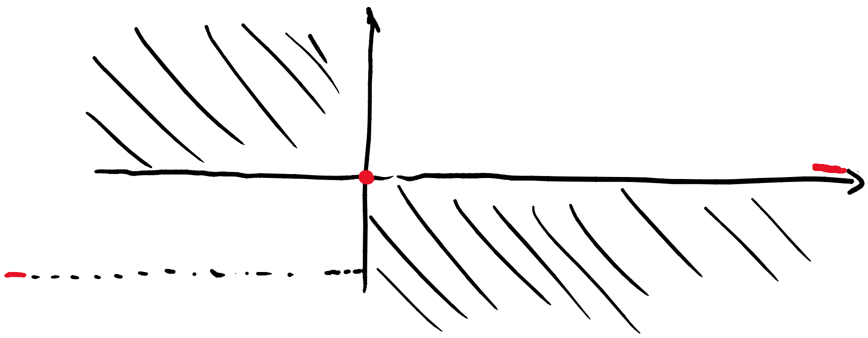
$$f(-x) = \arctan(-x e^{x}) = -\arctan(x e^{x}) \neq f(x)$$
$$\neq -f(x)$$

Non ci sono simmetrie.

- Segno e zeri

$$f(x) = 0 \iff x e^{-x} = 0 \iff x = 0.$$
$$f(x) > 0 \iff x e^{-x} > 0 \iff x > 0.$$

(perché $e^{-x} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.)



- Limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x e^{-x}) = \lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\frac{x}{e^{x}}\right)$$
$$= \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x e^{-x}) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Le rette $y = 0$ e $y = -\frac{\pi}{2}$ sono asintoti orizzontali rispettivamente per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$

<u>Derivata</u>:

$f(x) = \arctan(x e^{-x})$

è una composizione di funzioni derivabili quindi è derivabile in $\mathbb{R}$. Inoltre:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x e^{-x})^2} \cdot (x e^{-x})'$$

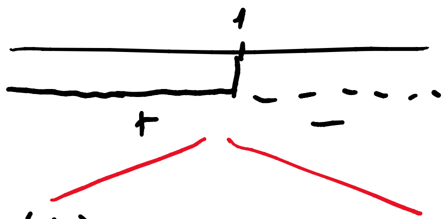
$$= \frac{1}{1 + x^2 e^{-2x}} \left(1 \cdot e^{-x} + x e^{-x} \cdot (-1)\right)$$

$$= \frac{e^{-x}(1 - x)}{1 + x^2 e^{-2x}}$$

<u>Segno della derivata</u>

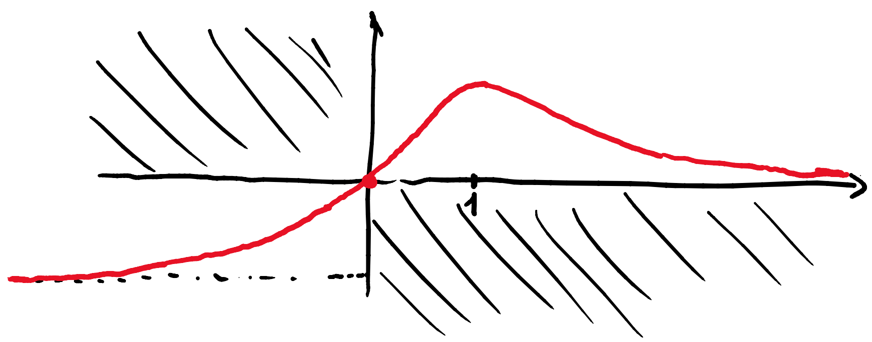
$f'(x) = 0 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1$

$f'(x) > 0 \iff 1 - x > 0 \iff x < 1$



$x = 1$ è un punto di max locale per f e $f(1) = \arctan(1 \cdot e^{-1}) = \arctan\left(\frac{1}{e}\right)$

<u>Grafico</u>:



ESERCIZIO

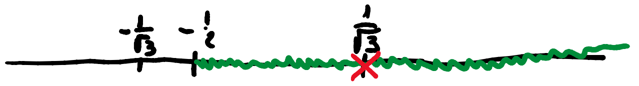
Sia $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2}$

1) Studiare il grafico di f

2) Determinare l'immagine di f.

• Dominio:

$$\begin{cases} 1+2x \geq 0 & \longleftrightarrow \quad x \geq -\frac{1}{2} \\ 1-3x^2 \neq 0 & \longleftrightarrow \quad 3x^2 \neq 1 \iff x^2 \neq \frac{1}{3} \iff x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$



$\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{\sqrt{3}} < -\frac{1}{2}$

$$\mathrm{Dom}(f) = [-\tfrac{1}{2}, +\infty) \setminus \{\tfrac{1}{\sqrt{3}}\}$$
$$= [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$$

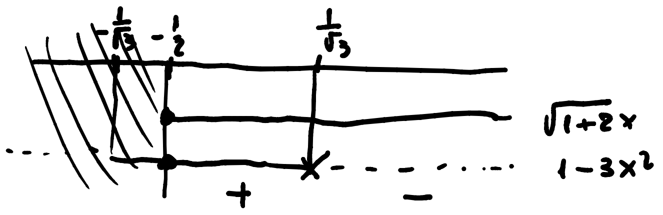
• Simmetrie: non ci sono.

• Segno e zeri:

$f(x) = 0 \iff \sqrt{1+2x} = 0 \iff 1+2x \iff x = -\frac{1}{2}$

$f(x) > 0 \iff$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

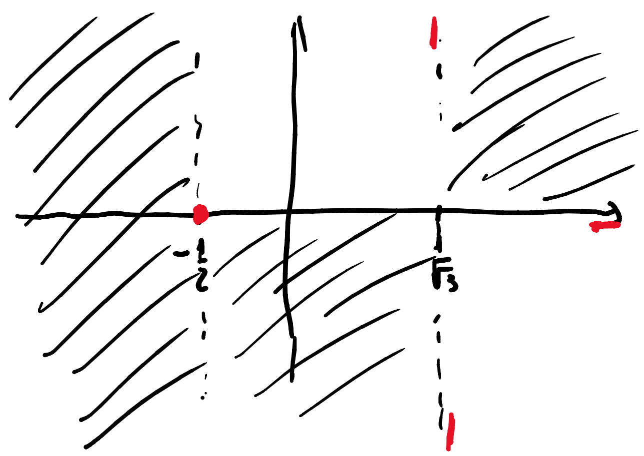


Concludendo

$f > 0$ in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

$f < 0$ in $(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$

$f = 0$ per $x = -\frac{1}{2}$



• Limiti:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = f(-\tfrac{1}{2}) = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{\sqrt{3}}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{\sqrt{3}}^+} \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{\sqrt{3}}^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2} =$$

f.i.: $\frac{+\infty}{-\infty}$

$$\overset{(D.L.H)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+2x}} \cdot \cancel{2}}{-6x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

La retta $y=0$ è un asint. orizz. per $x \to +\infty$.
La retta $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è un asintoto verticale.

<u>Derivata</u>: $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2}$

f è derivabile in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ e

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+2x}} \cdot \cancel{2}\,(1-3x^2) - \sqrt{1+2x} \cdot (-6x)}{(1-3x^2)^2}$$

$$= \frac{\frac{1-3x^2}{\sqrt{1+2x}} + 6x\sqrt{1+2x}}{(1-3x^2)^2} = \frac{\frac{1-3x^2+6x(1+2x)}{\sqrt{1+2x}}}{(1-3x^2)^2}$$

$$= \frac{1-3x^2+6x+12x^2}{\sqrt{1+2x}\,(1-3x^2)^2} = \frac{9x^2+6x+1}{\sqrt{1+2x}\,(1-3x^2)^2}$$

$$= \frac{(3x+1)^2}{\sqrt{1+2x}\,(1-3x^2)^2}$$

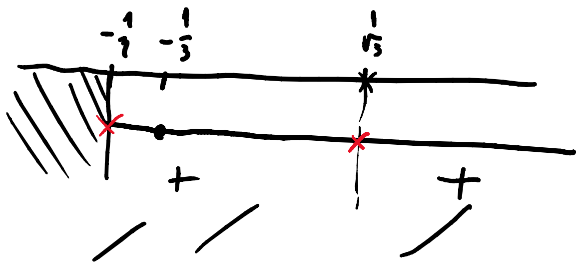
$$f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$$

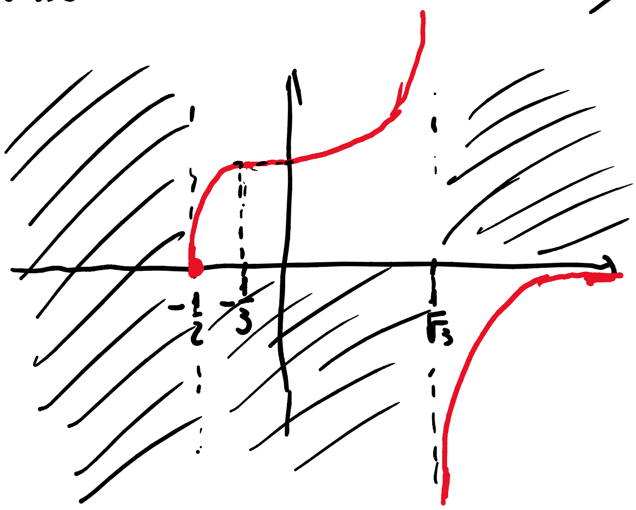
f è derivabile in $x = -\frac{1}{2}$? NO infatti:

$$f'_+\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} f'(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} \frac{(3x+1)^2}{\sqrt{1+2x}\,(1-3x^2)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{0^+\ \frac{1}{16}} = +\infty$$

$$f'\left(-\tfrac{1}{3}\right) = 0$$

$x = -\frac{1}{3}$ punto di flesso orizzontale.





2) Immagine ?

$$f(\mathrm{Dom}(f)) = \mathbb{R}$$