

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2023/24

Appello del 1° luglio 2024

1. Siano date in S_{20} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8, 9)(10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)(17, 18)(19, 20),$$

$$\tau = (1, 2)(3, 4)(5, 9, 8, 7, 6)(10, 12, 14, 16, 11, 13, 15)(17, 18, 19, 20).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{20} :

$$C(\sigma) = \{\alpha \in S_{20} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}.$$

(a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.

(b) Dire se $C(\sigma) \cap C(\tau)$ è ciclico.

2. Dire se esiste

(a) un monomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10}$,

(b) un epimorfismo di anelli da \mathbb{Z}_{36} a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$,

(c) un sottoanello di $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{16}$ isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$.

3. Dato un numero primo $p > 0$, si considerino i seguenti due polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2} + x^{p-1} - x - \bar{1},$$

$$g(x) = x^p - x.$$

(a) Determinare, al variare di p , $\text{MCD}(f(x), g(x))$.

(b) Determinare, al variare di p , il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $g(x)$.