MATEMATICA - LEZIONE 22

mercoledì 5 novembre 2025 09:03

ESEMPI DI CALCOLO DI LIMITI

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + x^2}{2 + x - 3x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} - 3\right)} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{1 - 2x^3} = -\infty$

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{1 - 2x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{-2x^3} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x = +\infty$.

- $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x^3}{2x^2 + x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}(1 + x)}{\cancel{x^2}(2 + x^2)} = \frac{1}{2}$

(Ricordare: se $x \to 0$ contano di più le potenze con esponente più basso!)

- $\lim_{x \to +\infty} 2^{\frac{\sqrt{x}}{1+3x}} = 2^0 = 1$ $\quad \frac{\sqrt{x}}{1+3x} \to 0$

- $\lim_{x \to +\infty} 2^{\frac{x}{1+3\sqrt{x}}} = \text{"}2^{+\infty}\text{"} = +\infty$

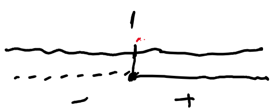
- $\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{x^2 - x}{7x^2 + \sqrt{x} - 3}\right) = \ln \frac{1}{7} = -\ln 7$ $\quad \frac{x^2 - x}{7x^2 + \sqrt{x} - 3} \searrow \frac{1}{7}$

- $\lim_{x \to 1} e^{\frac{x-2}{(x-1)^2}}$ $\quad \left(\lim_{x \to 1} \frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty\right)$

$= \text{"}e^{-\infty}\text{"} = 0$

- $\lim_{x \to 1} \frac{x-2}{(x-1)^3}$? $\quad \frac{-1}{0}$ $\quad$ Occorre controllare i segni!

$(x-1)^3$ ha lo stesso segno di $(x-1)$



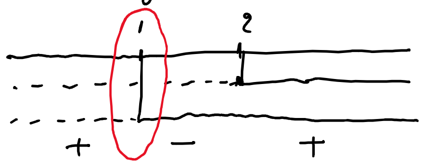
Quindi:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \frac{x-2}{(x-1)^3} &= \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{(x-1)^3} &= \frac{-1}{0^-} = +\infty\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-2)^3}$$

Nota:

Si può anche studiare il segno di tutta la frazione:

$$\frac{x-2}{(x-1)^3}$$



$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-2}{(x-1)^3} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{(x-1)^3} = +\infty$$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2} = \ ?$

Per $x \to +\infty$ consideriamo:

$\log_b x$ con $b > 1$

x^α con $\alpha > 0$

a^x con $a > 1$

sono tutte quantità che tendono a $+\infty$.

Si può dimostrare che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0 \qquad \left(\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{\log_b x} = +\infty \right)$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \qquad \left(\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \right)$$

Questi limiti definiscono una GERARCHIA DEGLI INFINITI

ESEMPIO

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x - x^{10}}{1 - x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2^x \left(1 - \frac{x^{10}}{2^x}\right)}{x^3 \left(\frac{1}{x^3} - 1\right)}$$

$\frac{x^{10}}{2^x} \to 0$, $\frac{1}{x^3} \to 0$

$$= \lim_{x\to +\infty} -\frac{2^x}{x^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$] non deriva dalla gerarchia perché non è una forma indeterminata

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}_{\to 0} \Big)^2 = 0^2 = 0$$

$\to 0$ per la gerarchia degli infiniti.

$$\lim_{x \to 1^+} \underbrace{e^{\overset{\to +\infty}{\frac{1}{x-1}}}}_{\to +\infty} \underbrace{(x-1)^{10}}_{\to 0} \qquad \text{f. i.} \quad +\infty \cdot 0$$

Sostituzione $y = \frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \to 1^+} \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \left(x - 1 = \frac{1}{y} \right)$

$$= \lim_{y \to +\infty} e^y \left(\frac{1}{y}\right)^{10} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^{10}} = +\infty$$

(per la gerarchia)

Nota:
$\log x + y = (\log x) + y$
$\log xy = \log (xy)$
$\log (x+y)$
$\log x \cdot y = (\log x) \cdot y$

- $\lim_{x \to +\infty} \log_4 x - \sqrt{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \Big(\underbrace{\frac{\log_4 x}{\sqrt{x}}}_{\to 0} - 1 \Big)$$

per la gerarchia

$$= \lim_{x \to +\infty} +\infty \cdot (-1) = -\infty$$

CONSEGUENZE DELLA GERARCHIA

1) $\lim_{x \to -\infty} a^x |x|^\alpha = 0$ con $a > 1$, $\alpha > 0$

2) $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \, | \log_b x |^\beta = 0$ con $\alpha, \beta > 0$, $b > 1$.

(Per il primo limite: sostituzione $y = -x$
Per il secondo limite: sostituzione $y = \frac{1}{x}$)

Def: Siano f_1, f_2 tali che $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \pm\infty$
$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = \pm \infty$. $(x_0 \in \overline{\mathbb{R}})$.

1) Si dice che f_1 ed f_2 sono INFINITI DELLO STESSO ORDINE se $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) Si dice che f_2 È UN INFINITO DI ORDINE SUPERIORE RISPETTO A f_1 (f_1 È UN INFINITO DI ORDINE INFERIORE)
se $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$.

la gerarchia degli infiniti dice che.

1) Per $x \to +\infty$, x^α è un infinito di ordine superiore rispetto a $\log_b x$
$(\alpha > 0$ e $b > 1)$

2) Per $x \to +\infty$, a^x è un infinito di ordine superiore rispetto a x^α
$(a > 1, \quad \alpha > 0)$.

—

· $f_1(x) = x^3$ e $f_2(x) = 1 - 2x^3$
sono infiniti dello stesso ordine per $x \to \pm\infty$.

· $f_1(x) = 2^x$ e $f_2(x) = 2^{x+1} = 2\, 2^x$
sono infiniti dello stesso ordine per $x \to +\infty$.

· $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3^x$ per $x \to +\infty$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{2^x}{3^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \to 0$$

3^x è un infinito di ordine superiore.

· $f_1(x) = \ln x$ e $f_2(x) = \log_2 x$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\ln x}{\log_2 x} = \frac{\ln x}{\frac{\ln x}{\ln 2}} = \ln 2$$

f_1 e f_2 hanno lo stesso ordine di infinito.

Def: Siano $f_1(x)$, $f_2(x)$ due funzioni e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono

ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI PER $x \to x_0$

($f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \to x_0$) se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$$

ESEMPI

- $f_1(x) = 2x^3 + 3$ e $f_2(x) = 2x^3$

  $f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \to +\infty$

- $f(x) = x^4 + 7x^3 + 5 \sim x^4$ per $x \to +\infty$

- $f(x) = 7\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \sim 7\sqrt{x}$ per $x \to +\infty$

- $f(x) = 7\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}$ per $x \to 0$.

  $f(x) = 7\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x}\,(\underbrace{7x^{\frac{1}{6}} + 1}_{\to 1})$ $x \to 0$

  quindi $\dfrac{f(x)}{\sqrt[3]{x}} = 7x^{\frac{1}{6}} + 1 \longrightarrow 1$ per $x \to 0$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE NEI PRODOTTI / QUOZIENTI

Siano f_1, f_2, g tre funzioni e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che $f_1 \sim f_2$ per $x \to x_0$. Allora

1) $\exists \lim_{x \to x_0} f_1(x)\, g(x) \iff \exists \lim_{x \to x_0} f_2(x)\, g(x)$ e

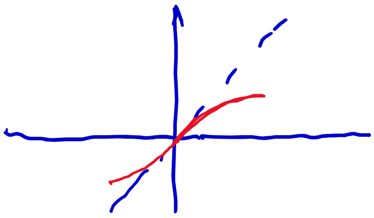
   in tal caso $\lim_{x \to x_0} f_1(x)\, g(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x)\, g(x)$

2) $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g(x)} \left(o\ \dfrac{g(x)}{f_1(x)} \right) \iff \exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f_2(x)}{g(x)} \left(\dfrac{g(x)}{f_2(x)} \right)$

   e in tal caso i limiti sono uguali.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 7x^8}{1 + 4x^3 - x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-7x^8}{-x^4} = \lim_{x \to +\infty} 7x^4 = +\infty$$

Limiti notevoli (tipo $\frac{0}{0}$)



1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\left(\sin x \sim x \text{ per } x \to 0 \right)$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\left(1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \text{ per } x \to 0 \right)$

DIM

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to +0} \frac{(1 - \cos x)}{x^2} \frac{(1 + \cos x)}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ $\left(\tan x \sim x \text{ per } x \to 0 \right)$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ $\left(\arcsin x \sim x \text{ per } x \to 0 \right)$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ $\left(\arctan x \sim x \text{ per } x \to 0 \right)$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\left(e^x - 1 \sim x \text{ per } x \to 0 \right)$

7) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $\left(a^x - 1 \sim x \ln a \text{ per } x \to 0 \right)$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\left(\ln(1+x) \sim x \text{ per } x \to 0 \right)$

9) $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ $\left(\log_a (1+x) \sim \frac{x}{\ln a} \text{ per } x \to 0 \right)$

10) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ $\left((1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \text{ per } x \to 0 \right)$

Tipo $1^{\pm\infty}$

1) $$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \qquad y = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$$

$$= \lim_{y \to 0} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = e^1 = e$$

2) $$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

3) $$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0^-} \overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\to 1} \frac{x}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{1 - \cos x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{0^-}$$

$$= 2 \cdot (-\infty) = -\infty,$$

Metodo alternativo: Usiamo il principio di sostituzione e le equivalenze: $\sin x \sim x$ per $x \to 0$ (e per $x \to 0^-$)

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ per $x \to 0$ (e per $x \to 0^-$)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0^-} 2\,\frac{1}{x} = 2\cdot(-\infty) = -\infty.$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3$$

$$= 3\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x}$$

$$\overset{y=3x}{=} 3\underbrace{\lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{y}}_{=1} = 3\cdot 1 = 3$$

Oppure

$$e^{3x}-1 \overset{y=3x}{=} e^{y}-1 \sim y = 3x$$

quindi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = 3$

Asintoti di funzioni:

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e siano $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D^{+}(I)\cap\mathbb{R}$. Si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è un ASINTOTO VERTICALE DESTRO PER f se $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

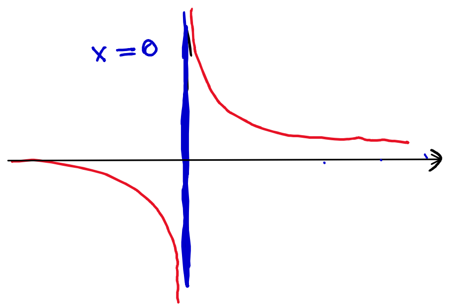
Se $x_0 \in D^{-}(I)\cap\mathbb{R}$. Si dice che $x = x_0$ è un ASINTOTO VERTICALE SINISTRO se $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

ESEMPI

1) $f(x) = \frac{1}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

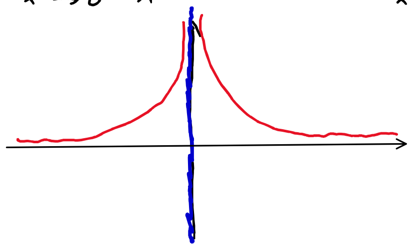
la retta $x=0$ è un asintoto verticale destro e sinistro



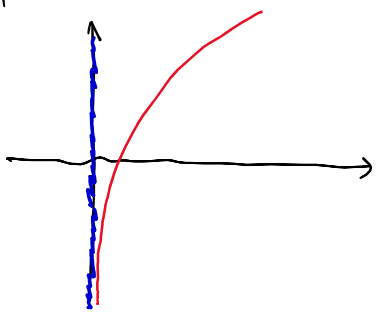
2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2}$



3) $f(x) = \ln x$



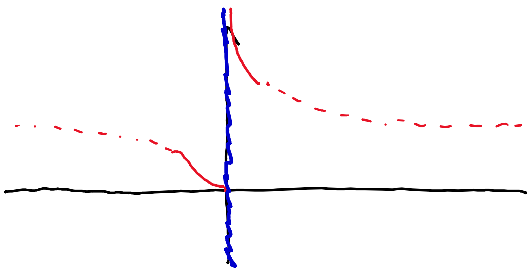
$x = 0$ è un asintoto verticale destro.

4) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$

$x = 0$ è un asintoto verticale destro

$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$ $x = 0$ non è un asintoto verticale sinistro



$f(x) = \tan x$
ha un asintoto verticale destro e sinistro in $x = \frac{\pi}{2}$ $(+k\pi)$

Asintoti orizzontali (per $x \to \pm\infty$)

Def. Sia $f: [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione.
Si dice che la retta $y = y_0$ è un ASINTOTO ORIZZONTALE PER $x \to +\infty$ se
$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$.

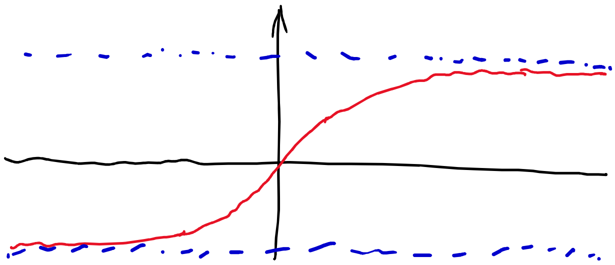
Def. Sia $f:]-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione
Si dice che la retta $y = y_0$ è un ASINTOTO ORIZZONTALE PER $x \to -\infty$ se
$\exists \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$.

ESEMPI

1) $f(x) = \arctan x$

$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$



La retta $y = \frac{\pi}{2}$ è un asint. orizzontale per f per $x \to +\infty$
La retta $y = -\frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale per f per $x \to -\infty$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\qquad$ $y = 0$ è a.o. per $x \to +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\qquad$ $y = 0$ è a.o. per $x \to -\infty$.

3) $f(x) = e^x$
ha un asintoto orizzontale a $-\infty$ (la retta $y = 0$)

$\lim_{x \to -\infty} e^x = \text{"} e^{-\infty} \text{"} = 0$

Asintoti obliqui (per $x \to \pm\infty$)

Def: Sia $f: [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Siano $m, q \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$. Si dice che la retta $y = mx + q$ è un ASINTOTO OBLIQUO per f per $x \to +\infty$ se:

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0.$

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}.$

Def: Sia $f:]-\infty, a] \to \mathbb{R}$. Siano $m, q \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$. Si dice che la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per f per $x \to -\infty$ se

1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = q$

ESEMPIO

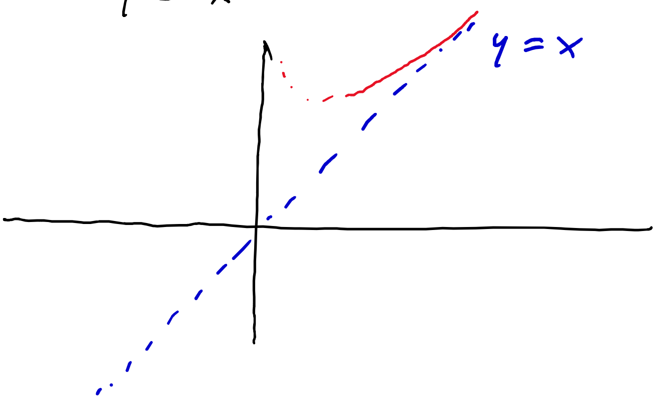
$f(x) = x + \frac{1}{x}$

Per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 \quad (m = 1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (q = 0)$$

$y = x$ è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$

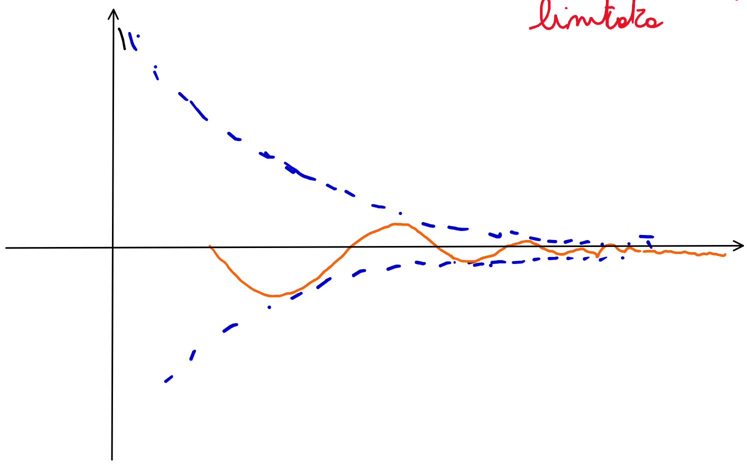


OSS Il grafico di una funzione può intersecare i suoi asintoti:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\sin x}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = 0$$

(non è il limite notevole)



$y = 0$ è un asintoto orizzontale e il grafico interseca questa retta infinite volte

2) $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$

$y = x$ è un asintoto obliquo.