Lezione 21

Prerequisiti: Lezioni 18, 20. Prodotto di ideali. Ideali primi.

Ideali frazionari.

Sia A un anello commutativo unitario.

Proposizione 21.1 Siano $I_1,...,I_r$ ideali propri di A.

a) Si ha che $I_1 \cdots I_r \subset I_1 \cap \cdots \cap I_r$, e vale $I_1 \cdots I_r = I_1 \cap \cdots \cap I_r$ se $I_p + I_q = A$, per ogni coppia di indici distinti p e q (in tal caso gli ideali si dicono *a due a due coprimi*).
b) Sia P un ideale primo di A. Se $I_1 \cdots I_r \subset P$, allora $I_i \subset P$ per qualche indice i.

Dimostrazione: a) L'inclusione è ovvia. Per provare la seconda parte dell'enunciato, procediamo per induzione su $r \geq 2$. Per la base dell'induzione, supponiamo che $I_1 + I_2 = A$. Allora esistono $a_1 \in I_1, a_2 \in I_2$ tali che si abbia $a_1 + a_2 = 1$. Sia $a \in I_1 \cap I_2$. Allora $a = a(a_1 + a_2) = aa_1 + aa_2 \in I_2 I_1 + I_1 I_2 = I_1 I_2$, per cui $I_1 \cap I_2 \subset I_1 I_2$, come volevasi. Sia ora $r > 2$ e supponiamo la tesi vera per $r-1$. Allora per ogni coppia di indici $p,q \in \{1,...,r-2\}$ si ha che $I_p + I_q = A$, e, inoltre,

$$A = (I_p + I_{r-1})(I_p + I_r) \subset I_p + I_{r-1}I_r, \text{ ossia } A = I_p + I_{r-1}I_r,$$

per cui l'ipotesi induttiva si applica agli ideali $I_1, \ldots, I_{r-2}, I_{r-1}I_r$, e pertanto, tenendo anche conto della base dell'induzione,

$$I_1 \cap \cdots \cap I_{r-2} \cap I_{r-1} \cap I_r = I_1 \cap \cdots \cap I_{r-2} \cap I_{r-1}I_r = I_1 \cdots I_{r-2}I_{r-1}I_r.$$

b) Supponiamo per assurdo che $I_i \not\subset P$ per ogni $i = 1,...,r$. Allora, per ogni $i = 1,...,r$, esiste $x_i \in I_i \setminus P$. Per la primalità di P segue che $x_1 \cdots x_r \in I_1 \cdots I_r \setminus P$, contro l'ipotesi che $I_1 \cdots I_r \subset P$.
□

Proposizione 21.2 Sia A un anello noetheriano. Allora ogni ideale (non nullo) di A contiene il prodotto di un numero finito di ideali primi (non nulli).

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. Sia S l'insieme degli ideali di A che non contengono nessun prodotto finito di ideali primi. Poiché S è non vuoto, ed A è noetheriano, in base alla condizione b) della Definizione 18.1, S possiede un elemento massimale I, che, in particolare, non è un ideale primo. Quindi esistono $a,b \in A \setminus I$ tali che $ab \in I$. Data la massimalità di I, segue che gli ideali $I+(a), I+(b)$, che contengono I propriamente, non appartengono a S. Quindi ognuno di essi contiene un prodotto di ideali primi. Ma allora lo stesso vale per il loro prodotto, che è

$$(I+(a))(I+(b)) \subset I + (ab) = I.$$

Ciò contraddice l'ipotesi effettuata su I.

Se I è un ideale non nullo, si consideri l'insieme S degli ideali non nulli di A che non contengono nessun ideale prodotto di ideali primi non nulli. Detto I un suo elemento massimale, si conclude ragionando come sopra. □

Veniamo ora alla nozione principale di questa lezione:

Definizione 21.3 Sia A un dominio d'integrità, sia K un suo campo dei quozienti. Sia I un sotto-A-modulo di K. I si dice *ideale frazionario* di A se $aI \subset A$ per qualche $a \in A, a \neq 0$; l'elemento a si dice un *denominatore* di I.

Osservazione 21.4 Se a è un denominatore dell'ideale frazionario I, allora aI è un ideale di A. L'ideale frazionario I è un ideale di A se e solo se 1 è un denominatore di I. In tal caso lo si dice anche *ideale intero* di A.

Esempio 21.5

a) $\left\{ \frac{n}{2} \middle| n \in \mathbf{Z} \right\}$ è un ideale frazionario di **Z**, i suoi denominatori sono tutti e soli i multipli non nulli di 2.
b) Sia F un campo. Allora $\left\{ \frac{f(x)}{x+1} \middle| f(x) \in F[x] \right\}$ è un ideale frazionario di $F[x]$. I suoi denominatori sono tutti e soli i polinomi non nulli aventi -1 come radice.

Il prossimo risultato fornisce una caratterizzazione degli ideali frazionari di un anello noetheriano e, inoltre, estende le operazioni tra ideali interi agli ideali frazionari.

Lemma 21.6 Sia A un dominio d'integrità, sia K il suo campo dei quozienti.

a) Se I è un sotto-A-modulo f.g. di K, allora I è un ideale frazionario di A.
b) Se A è noetheriano e I è un ideale frazionario di A, allora I è un sotto-A-modulo f.g. di K.
c) Se I e J sono ideali frazionari di A aventi denominatori a e b rispettivamente, allora $I \cap J, IJ, I+J$ sono ideali frazionari di A aventi denominatori a o b, ab, e ab rispettivamente.

<u>Dimostrazione</u>: a) Sia $I = \sum_{i=1}^{n} A a_i b_i^{-1}$, per opportuni $a_i, b_i \in A, b_i \neq 0$. Allora, posto $a = b_1 \cdots b_n$, si ha:

$$aI = \sum_{i=1}^{n} A a_i b_1 \cdots \hat{b_i} \cdots b_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i b_1 \cdots \hat{b_i} \cdots b_n),$$

che è un ideale di A. Pertanto I è un ideale frazionario di A con denominatore a.
b) Sia a un denominatore di I. Allora $aI \subset A$, da cui $I \subset a^{-1}A$, Ma $a^{-1}A$ è un A-modulo libero generato da a^{-1}, quindi è isomorfo al modulo regolare A (mediante $a^{-1}x \mapsto x$). In particolare è un A-modulo noetheriano. Quindi, in base alla condizione c) della Definizione 18.1, il suo sotto-A-modulo I è f.g..
c) Naturalmente $I \cap J, IJ, I+J$ sono sotto-A-moduli di K. Inoltre

$$a(I \cap J) \subset aI \subset A, \quad \text{e} \quad b(I \cap J) \subset bJ \subset A,$$

$$ab(IJ) = (aI)(bJ) \subset A,$$

$$ab(I+J)=abI+abJ\subset aI+bJ\subset A.\ \square$$

Lemma 21.7 Sia A un dominio di Dedekind. Sia K un suo campo dei quozienti. Sia I un ideale primo non nullo di A. Sia inoltre

$$J=A:I=\{x\in K \mid xI\subset A\}.$$

Allora A è un sottoinsieme proprio di J.

Dimostrazione: Poiché $AI\subset A$, si ha che $A\subset J$, quindi resta da provare che $A\neq J$. Sia $a\in I, a\neq 0$. In virtù della Proposizione 21.2, l'ideale non nullo (a) contiene il prodotto di ideali primi non nulli $P_1\cdots P_r$, supponiamo che r sia minimo. Allora, in base alla Proposizione 21.1 b), I contiene uno di questi ideali, diciamo $P_1\subset I$. Ma in un dominio di Dedekind ogni ideale primo non nullo è massimale, quindi $P_1=I$. Se $r=1$, allora $P_1\subset(a)\subset P_1$, quindi $(a)=P_1$. In particolare (a) è un ideale proprio di A. Sia $b\in A\setminus(a)$. Allora $ba^{-1}\notin A$, ma $ba^{-1}I=ba^{-1}(a)=(b)\subset A$, dunque $ba^{-1}\in J$. Ciò prova che $A\neq J$. Sia ora $r\geq 2$. Si ponga $I_1=P_2\cdots P_r$. Allora $I_1\not\subset(a)$, per la minimalità di r. Sia $b\in I_1, b\notin(a)$. Ora $II_1=P_1\cdots P_r\subset(a)$, in particolare $Ib\subset(a)$, dunque $Iba^{-1}\subset A$. Pertanto $ba^{-1}\in J$; però $ba^{-1}\notin A$. $\square$

Proposizione 21.8 Sia A un dominio di Dedekind, sia K un suo campo dei quozienti. Sia I un ideale primo non nullo di A. Sia $J=A:I$. Allora J è un ideale frazionario di A e $IJ=A$.

Dimostrazione: La prima parte dell'enunciato è facile: J è chiaramente un sotto-A-modulo di K ed ogni elemento non nullo di I è un denominatore per J. Segue che $IJ\subset A$, quindi IJ, che, per il Lemma 21.6 c) è un ideale frazionario di A, è un ideale intero di A. In virtù del Lemma 21.7, $I=IA\subset IJ\subset A$. Ma I è massimale, dunque $IJ=I$, oppure $IJ=A$. Supponiamo per assurdo che sia $IJ=I$. Se $x\in J$, allora $xI\subset IJ=I$, quindi, per induzione, si conclude che $x^nI\subset I$ per ogni $n>0$. Sia $a\in I, a\neq 0$. Allora $x^na\in x^nI\subset I\subset A$. Segue che $A[x]$ è un ideale frazionario di A. Essendo A noetheriano, per il Lemma 21.6 b), $A[x]$ è allora un sotto-A-modulo di K f.g.. In virtù del Teorema 19.9, x è quindi intero su A. Essendo A integralmente chiuso, si ha allora che $x\in A$. Quindi $J\subset A$, contro il Lemma 21.7. Dunque $IJ=A$. $\square$

Osservazione 21.9 Dal Lemma 21.6 c) segue che l'insieme degli ideali frazionari di un dominio d'integrità è dotato di un'operazione prodotto: rispetto ad essa è un semigruppo commutativo dotato di elemento neutro (l'ideale totale A). È infatti immediato verificare la proprietà associativa. La Proposizione 21.8 stabilisce l'esistenza degli inversi degli ideali primi non nulli di un dominio di Dedekind. Nella prossima lezione mostreremo che ciò vale per tutti gli ideali frazionari non nulli. In altri termini, l'insieme degli ideali frazionari non nulli di un dominio di Dedekind forma un gruppo abeliano moltiplicativo. Se $IJ=A$, scriveremo $J=I^{-1}$.

Esempio 21.10

a) L'ideale $2\mathbf{Z}$ di $\mathbf{Z}$ ha come inverso l'ideale frazionario $\frac{1}{2}\mathbf{Z}=\left\{\frac{a}{2} \middle| a\in\mathbf{Z}\right\}$.

b) In generale, per ogni intero non nullo n, $(n\mathbf{Z})^{-1} = \frac{1}{n}\mathbf{Z}$. In $\mathbf{Z}$, ogni ideale non nullo ammette quindi inverso. È immediato osservare che ciò vale in ogni PID.

c) Ancor più in generale, se A è un dominio di Dedekind, per ogni elemento non nullo $a \in A$, si ha che $(a)^{-1} = Aa^{-1}$.