CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2016/17

Appello dell'11 settembre 2017

1. Sia data la permutazione

$$\sigma = (1,2)(3,4,5,6)(7,8,9)(10,11,12,13,14) \in S_{14}.$$

(a) Determinare l'insieme $H = \{\alpha \in \langle \sigma \rangle \mid \mathrm{o}(\alpha) \text{ è dispari}\}$ e dire se è un sottogruppo di S_{14}.

(b) Determinare l'insieme $K = \{\alpha \in \langle \sigma \rangle \mid \alpha^4 = \mathrm{id}\}$ e dire se è un sottogruppo di S_{14}.

(c) Determinare la cardinalità dell'insieme $L = \{\alpha \in \langle \sigma \rangle \mid 5 \text{ divide } \mathrm{o}(\alpha)\}$.

2. Siano *n, m* interi maggiori di 1, e sia data l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m &\to \mathbb{Z}_{n+m} \\ ([a]_n, [b]_m) &\mapsto [2a+2b]_{n+m} \end{aligned}$$

(a) Determinare tutti i valori di *n*, *m* per i quali φ è ben definita.

(b) Provare che l'unico omomorfismo di gruppi $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{19} \to \mathbb{Z}_{23}$ è l'omomorfismo nullo.

3. Sia $f(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

(a) Trovare un numero primo $p > 100$ tale che la riduzione di $f(x)$ modulo p non abbia radici in $\mathbb{Z}_p$.

(b) Trovare un numero primo $p > 100$ tale che la riduzione di $f(x)$ modulo p abbia almeno una radice in $\mathbb{Z}_p$.