Raccolta di esercizi sulle nozioni di base della Matematica

Logica, Insiemistica, Funzioni & Induzione

Vincenzo C. Nardozza

Indice

Introduzione

La presente è una raccolta di esercizi volta a integrare quelli già presenti sul libro di testo adottato (in numero già abbastanza cospicuo, in realtà) per aiutare lo studente ad assimilare il prima possibile, e in modo qualitativamente ottimale, quei concetti che sono alla base non solo della Matematica Discreta, ma di tutta la Matematica. La quasi totalità degli esercizi è tratta da tre testi che ho voluto citare esplicitamente, sia per dare il giusto credito agli Autori, sia per suggerire tali testi per uno studio personale più ad ampio respiro, almeno sulle questioni fondazionali, stuzzicando (sperabilmente) la curiosità del lettore. In realtà, uno studio comparato su vari testi può essere più probabilmente fonte di confusione che di comprensione per chi ha appena cominciato i suoi studi universitari. Ecco perchè mi sono preso la briga di selezionare con tutta la cura che potevo degli esercizi, stando attento a che

- fossero significativi, per la comprensione dei concetti coinvolti;
- fossero elementari, che cioè non coinvolgessero oggetti matematici non di immediata comprensione (per esempio, limiti o integrali, ma anche anelli o gruppi);
- ponessero un minimo di sfida;
- non fossero ripetitivi;
- non fossero troppo difficili da risolvere.

Li devo svolgere tutti?

Mi aspetto che questa sia la domanda che si porrà lo studente medio. La risposta è: quanti ne servono per aver chiaro il concetto. Un esercizio dovrebbe porre delle difficoltà, per meritare di essere affrontato; se capisco che un esercizio non ne pone, non serve risolverlo. **Però:** molte volte ho visto studenti che con assoluta semplicità e immediatezza risolvevano esercizi senza nessuna difficoltà, *dando la risposta sbagliata!* Nemmeno era stata compresa la domanda dell'esercizio! **Quindi:** prima di decidere se l'esercizio merita di essere risolto in dettaglio, è bene provare a leggerlo con attenzione e almeno esser certi di aver capito quel che chiede, e aver chiara una linea da seguire per affrontarlo con successo. Da questo punto di vista, più esercizi si leggono con questa attenzione, meglio è, anche se poi se ne svolge in dettaglio solo una parte.

Sono questi gli esercizi tipo della prova scritta?

Anche questa è una domanda che mi aspetto. La risposta è, ovviamente, no, per due motivi principali. Il primo è che questi sono solo su una piccolissima parte del programma, che peraltro dovrebbe essere già almeno in parte conosciuta come prerequisito per l'iscrizione a un corso di Laurea di tipo scientifico (in particolare, per Informatica o Matematica). Il secondo motivo, più importante, è che questi esercizi servono allo studente per assimilare i concetti coinvolti: se un esercizio pone delle difficoltà notevoli, bisogna ritornare a studiare le nozioni coinvolte, perchè è lì che si trova l'ostacolo che impedisce di risolvere l'esercizio. Questo avanti e indietro tra la definizione (o concetto) data in teoria e l'esercizio da svolgere è la migliore strategia per assimilare profondamente i concetti esposti. Anche se, dopo congruo impegno, l'esercizio non sarà stato risolto, lo stesso avrà svolto la sua funzione: il concetto sarà diventato molto più chiaro. **Quindi:** questi esercizi servono a voi per capire i concetti. **Invece** gli esercizi dati in sede di prova scritta servono **a me** per esprimere una valutazione sulla vostra preparazione. Nascendo per un altro scopo, saranno necessariamente di natura diversa.

Sono molto difficili?

Come già detto, gli esercizi scelti servono allo scopo di far assimilare concetti dati. Quindi, la maggior parte di essi sono molto semplici. Tuttavia, qui e li, ogni tanto, qualcuno più sottile è stato incluso, anche perchè svolgere esercizi dovrebbe essere anche piacevole, e trovarne ogni tanto uno più…"sghembo" dovrebbe essere stimolante.

E le soluzioni?

Le ho messe. Due parole su di esse:

(1) ho inserito le risposte solo nel caso in cui ci fosse una risposta univoca e sintetica. Per esempio, se l'esercizio è *quanto fa 2+2?* ho inserito sinteticamente la risposta *4*. Se l'esercizio è *Provare che …* la risposta non c'è, perchè nè la dimostrazione è necessariamente unica, nè è sintetica (in genere). Tuttavia, per alcuni degli esercizi più "strambi" mi è parso doveroso inserire almeno una risposta esauriente.

(2) Ho cercato, per quanto possibile coerentemente con il precedente punto, di dare la soluzione a tutti gli esercizi più facili, perchè almeno in essi dovreste cominciare a costruire delle certezze. Mi capita spessissimo, infatti, di vedere degli inciampi brutali proprio sulle domande più facili. Vediamo di costruire il palazzo cominciando a realizzare delle fondamenta sicure.

(3) Le soluzioni servono per <u>controllare</u> l'esattezza della propria risposta, <u>non</u> per sapere come si svolge l'esercizio – quello è il vostro compito! Altrimenti, risparmiate tempo, e fate altro! A volte, tuttavia, se c'è stato un adeguato sforzo nel tentativo di risolvere l'esercizio, guardare la soluzione può aiutare a capire l'errore commesso nella risoluzione. La difficile decisione se guardare la soluzione o continuare a provare da soli è lasciata alla vostra coscienza di studenti: siete voi a dover trovare il giusto equilibrio.

Altro?

Non mi viene in mente niente. Ora tocca a voi.
Buon Lavoro!

26 Settembre 2023 *Vincenzo C. Nardozza*

Parte 1. Logica

***Esercizio* 1.1.** [♣]
Decidere quali tra le seguenti sono proposizioni:

(1) nel 1990 George W. Bush era presidente degli Stati Uniti;
(2) $x + 3$ è un intero positivo
(3) se solo ogni mattina fosse soleggiata e limpida come questa!
(4) quindici è un numero pari
(5) se Jennifer arriverà tardi alla festa, suo cugino George si arrabbierà moltissimo!
(6) Che ore sono?
(7) Dalle sale di Montezuma alle spiagge di Tripoli.

***Esercizio* 1.2.** [‡]
Quali di queste affermazioni sono proposizioni? Quali sono i valori di verità di quelle che sono proposizioni?

(1) Boston è la capitale del Massachusetts;
(2) Miami è la capitale della Florida;
(3) $2 + 3 = 5$;
(4) $5 + 7 = 10$;
(5) $x + 2 = 11$;
(6) Rispondi a questa domanda;
(7) $x + y = y + x$ per ogni coppia di numeri reali x e y.

***Esercizio* 1.3.** [‡]
Qual è la negazione di ognuna delle seguenti proposizioni?

(1) Oggi è giovedì;
(2) non c'è inquinamento in New Jersey;
(3) $2 + 1 = 3$;
(4) L'estate in Maine è calda e assolata.

***Esercizio* 1.4.** [‡]
Siano p e q le proposizioni

p : Questa settimana ho comprato un biglietto della lotteria
q : Ho vinto il milione di dollari di jackpot di venerdì.

Esprimere ciascuna delle proposizioni seguenti in lingua corrente:

$a)\ \neg p$	$b)\ p \wedge q$	$c)\ p \Rightarrow q$
$d)\ p \vee q$	$e)\ p \iff q$	$f)\ \neg p \Rightarrow \neg q$
$g)\ \neg p \vee \neg q$	$h)\ \neg p \vee (p \wedge q)$	

***Esercizio* 1.5.** [‡]
Siano p e q le proposizioni

p : siamo sottozero
q : sta nevicando

Scrivere le seguenti proposizioni usando p, q e i connettivi logici:

(1) Stiamo sottozero e sta nevicando;
(2) stiamo sottozero ma non nevica;
(3) non siamo sottozero e non sta nevicando;
(4) o sta nevicando o siamo sottozero
(5) se siamo sottozero sta anche nevicando;
(6) o siamo sottozero o sta nevicando, ma se siamo sottozero non sta nevicando;

(7) essere sottozero è necessario e sufficiente perchè stia nevicando.

***Esercizio* 1.6.** [♣]
Siano p e q proposizioni. Sapendo che $p \Rightarrow q$ è falsa, decidere il valore logico delle seguenti proposizioni:

(1) $p \wedge q$
(2) $\neg p \vee q$
(3) $q \Rightarrow p$
(4) $\neg q \Rightarrow \neg p$.

***Esercizio* 1.7.** [♣]
Si considerino le seguenti proposizioni elementari:

p: finisco di scrivere il mio esercizio di programmazione prima di pranzo;
q: giocherò a tennis nel pomeriggio;
r: splende il sole;
s: c'è una bassa umidità.

Esprimere le seguenti proposizioni in modo formale:

(1) se il sole splende, giocherò a tennis nel pomeriggio;
(2) finire di scrivere il mio esercizio di programmazione prima di pranzo è necessario per giocare a tennis nel pomeriggio;
(3) bassa umidità e sole che splende è sufficiente per poter giocare a tennis nel pomeriggio.

***Esercizio* 1.8.** [‡]
Determinare se le seguenti bicondizionali sono vere o false:

(1) $2 + 2 = 4$ se e solo se $1 + 1 = 2$;
(2) $1 + 1 = 2$ se e solo se $2 + 3 = 4$;
(3) è inverno se e solo se non è estate, primavera o autunno;
(4) $1 + 1 = 3$ se e solo se gli asini volano;
(5) $0 > 1$ se e solo se $2 > 1$.

***Esercizio* 1.9.** [‡]
Stabilire il valore di verità di ciascuna delle seguenti proposizioni:

(1) se $1 + 1 = 2$ allora $2 + 2 = 5$;
(2) se $1 + 1 = 3$ allora $2 + 2 = 4$;
(3) se $1 + 1 = 3$ allora $2 + 2 = 5$;
(4) se gli asini volano, allora $1 + 1 = 3$;
(5) se $1 + 1 = 3$ allora gli asini volano;
(6) se $1 + 1 = 2$ allora gli asini volano;
(7) se $2 + 2 = 4$ allora $1 + 2 = 3$.

***Esercizio* 1.10.** [‡]
Riformulare ciascuna delle seguenti implicazioni nella forma $p \Rightarrow q$:

(1) E' necessario lavare la macchina del capo per avere una promozione;
(2) venti da sud implicano il disgelo primaverile;
(3) una condizione sufficiente perchè la garanzia sia valida è che tu abbia acquistato il computer meno di un anno fa;
(4) Willy viene scoperto quando bara;
(5) puoi accedere al sito web solo se hai pagato una quota d'iscrizione;
(6) l'essere eletti consegue dal conoscere le persone giuste;
(7) Carol ha il mal di mare non appena sale in barca;
(8) nevica ogni volta che il vento soffia da nordest;
(9) il melo fiorirà se ci sarà caldo per una settimana;
(10) se guiderai per più di 400 Km, avrai bisogno di fare benzina;

(11) la tua garanzia è valida solo se hai comperato il lettore CD meno di 90 giorni fa;
(12) ricorderò di mandarti l'indirizzo solo se mi manderai un sms;
(13) il fatto che tu abbia ottenuto il lavoro implica che le tue credenziali siano state le migliori;
(14) la spiaggia viene erosa ogni volta che c'è un temporale;
(15) è necessario avere una password solida per avere accesso al server.

***Esercizio* 1.11.** [‡]
In un piccolo villaggio sperduto, i pochi abitanti hanno una particolarità: alcuni di essi dicono sempre la verità, altri mentono sempre. Inoltre ciascuno di essi risponde solo alla prima domanda posta da uno sconosciuto, solo con un sì o con un no.

Un turista vuole raggiungere delle antiche rovine nelle vicinanze del villaggio, ma arriva a un bivio senza indicazioni. Sa che una delle due strade porta alle rovine, ma l'altra porta nel profondo della giungla. Per fortuna (?) al bivio c'è un abitante del villaggio e, sapendo che avrà in risposta un si o un no all'unica domanda che può fare, pone al villico la seguente:

"se ti chiedessi se la strada a destra porta alle rovine, mi risponderesti di si?"

Ottiene in risposta un *no*. Deve andare a destra, a sinistra o aspettare di incontrare qualche altro villico per poter fare una seconda domanda?

***Esercizio* 1.12.** [‡]
Un esploratore è stato catturato da un gruppo di cannibali. In questa tribù, ci sono solo due tipi di cannibali: quelli che dicono sempre la verità e quelli che mentono sempre. Però, la tribù dà sempre la possibilità agli esploratori catturati di scampare la morte: bisogna indovinare a quale tipo appartiene il capo tribù, con una sola domanda.

(1) Spiegare perchè la domanda *"tu menti?"* non è utile;
(2) suggerire all'esploratore una domanda da formulare al capo tribù per salvarsi la vita!

***Esercizio* 1.13.** [‡]
I seguenti quesiti sono relativi agli abitanti dell'isola *dei Cavalieri e dei Furfanti* creata da Smullyan, in cui i Cavalieri dicono sempre la verità e i Furfanti mentono sempre. Incontri due abitanti dell'isola, A e B. Determina il loro tipo o, se ciò è impossibile in base alle informazioni avute, cerca comunque di arrivare a qualche conclusione.

(1) A dice *"Almeno uno di noi è un Furfante"*, B non dice nulla;
(2) A dice *"Entrambi siamo Cavalieri"* e B dice *"A è un Furfante"*;
(3) A dice *"Io sono un Furfante e B è un Cavaliere"* e B non dice nulla:
(4) Sia A che B dicono *"Io sono un Cavaliere"*.
(5) A dice *"Siamo entrambi Furfanti"* e B non dice nulla.

***Esercizio* 1.14.** Stabilire il valore di verità di ciascuna delle seguenti affermazioni:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 > 0$;
(2) $\forall x \in \mathbb{R}\ x = 2$;
(3) $\forall x \in \mathbb{R}\ x > 0$;
(4) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ x = y^2$;
(5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ x = y^2 + 1$;
(6) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}\ x^2 = y^2 + 1$;
(7) $\exists x \in \mathbb{R}\ -x > 0$;
(8) $\exists x \in \mathbb{R}\ x^2 = 5$;
(9) $\exists x \in \mathbb{N}\ x^2 = 7$;
(10) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{R}\ x^2 - y^2 = 1$;

(11) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{R}\ x^2 < y^2$;
(12) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{R}\ x^2 = y$;
(13) $\exists x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\ xy = 1$;
(14) $\exists x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\ x(y-1) = 2$;
(15) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\ x^2 = y^2 - 1$;
(16) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\, \exists z \in \mathbb{R}\ xyz = 1$;
(17) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\, \exists z \in \mathbb{R}\ xy + z = 1$;
(18) $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \exists z \in \mathbb{R}\ xy - z = 1$.

***Esercizio* 1.15.** [‡]
Sia $P(x)$ il predicato $x \leqslant 4$. Quali sono i valori di verità di $P(0)$, $P(4)$ e $P(6)$?

***Esercizio* 1.16.** [‡]
Sia $P(x)$ il predicato *"la parola x contiene la lettera a"*. Quali sono i valori di verità di $P(\text{orange})$, $P(\text{limone})$, $P(\text{vero})$, $P(\text{falso})$?

***Esercizio* 1.17.** [‡]
Sia $P(x)$ il predicato *"lo studente x ogni fine settimana trascorre più di cinque ore a studiare"*, e l'universo del discorso per x consiste nell'insieme degli studenti. Esprimere in linguaggio corrente le seguenti proposizioni:

(1) $\exists x\ P(x)$;
(2) $\forall x\ P(x)$;
(3) $\exists x\ \neg P(x)$;
(4) $\forall x\ \neg P(x)$.

***Esercizio* 1.18.** [‡]
Sia $C(x)$ l'affermazione *x ha un gatto*, $D(X)$ quella *x ha un cane*, $F(x)$ quella *x ha un furetto*. L'universo del discorso per x è formato dagli studenti della vostra classe. Esprimete formalmente le seguenti affermazioni:

(1) uno studente della vostra classe ha un gatto, un cane e un furetto;
(2) tutti gli studenti della vostra classe hanno un cane, un gatto o un furetto;
(3) qualche studente della vostra classe ha un gatto e un furetto, ma non un cane;
(4) nessuno studente della vostra classe ha un cane, un gatto e un furetto;
(5) per ognuno dei tre animali, cane, gatto e furetto, c'è uno studente della vostra classe che possiede uno di essi come animaletto domestico.

***Esercizio* 1.19.** [‡]
Sia $P(x)$ l'affermazione *"$x = x^2$"*. Se l'universo del discorso consiste degli interi, quali sono i valori di verità di

a) $P(0)$	*b)* $P(1)$	*c)* $P(2)$
d) $P(-1)$	*e)* $\exists x\, P(x)$	*f)* $\forall x\, P(x)$

***Esercizio* 1.20.** [‡]
Sia $Q(x)$ l'affermazione $x + 1 > x$. Se l'universo del discorso consiste di tutti gli interi, quali sono i valori di verità di:

a) $Q(0)$	*b)* $Q(-1)$	*c)* $Q(1)$
d) $\exists x\, Q(x)$	*e)* $\forall x\, Q(x)$	*f)* $\exists x\, \neg Q(x)$
g) $\forall x\, \neg Q(x)$		

***Esercizio* 1.21.** [‡]
Determinare il valore di verità di ciascuna delle seguenti proposizione, se l'universo del discorso consiste di tutti i numeri interi:

(1) $\forall n\, (n + 1 > n)$;

(2) $\exists n\,(2n = 3n)$;
(3) $\exists n\,(n = -n)$;
(4) $\forall n\,(n^2 \geqslant n)$.

***Esercizio* 1.22.** [‡]
Tradurre formalmente, usando predicati, quantificatori e connettivi, ciascuna delle seguenti frasi in due modi: dapprima assumendo come universo del discorso l'insieme degli studenti della vostra classe, e poi l'insieme di tutte le persone.

(1) qualcuno nella vostra classe parla inglese;
(2) ciascuno nella vostra classe è amichevole;
(3) c'è qualcuno nella vostra classe che non è nato in Veneto;
(4) uno studente della vostra classe è apparso in un film;
(5) nessuno nella vostra classe ha seguito un corso di programmazione logica;
(6) chiunque nella vostra classe ha un cellulare;
(7) qualcuno nella vostra classe ha visto un film straniero in lingua originale;
(8) c'è una persona nella vostra classe che non sa nuotare;
(9) tutti gli studenti nella vostra classe sanno risolvere un'equazione quadratica;
(10) qualche studente nella vostra classe non vuole essere ricco;

***Esercizio* 1.23.** [‡]
Tradurre ciascuna delle seguenti affermazioni in espressioni logiche usando predicati, quantificatori e connettivi logici:

(1) Nessuno è perfetto;
(2) non tutti sono perfetti;
(3) tutti i tuoi amici sono perfetti;
(4) uno dei tuoi amici è perfetto;
(5) chiunque è tuo amico ed è perfetto;
(6) non tutti sono tuoi amici o qualcuno non è perfetto.

***Esercizio* 1.24.** [‡]
Tradurre ciascuna delle seguenti affermazioni in espressioni logiche usando predicati, quantificatori e connettivi logici, e successivamente formarne la negazione:

(1) Tutti i cani hanno le pulci;
(2) C'è un cavallo che sa fare le addizioni;
(3) Tutti i koala sanno arrampicarsi;
(4) non ci sono scimmie che parlano francese;
(5) c'è un maiale che sa nuotare e pescare;
(6) ci sono cani vecchi che imparano trucchi nuovi;
(7) nessun coniglio sa fare i calcoli;
(8) ogni uccello sa volare;
(9) non ci sono cani che sanno parlare;
(10) nessuno in questa classe conosce il Francese e il Russo;
(11) alcuni automobilisti non rispettano il limite di velocità;
(12) tutti i film svedesi sono seri;
(13) nessuno è capace di mantenere un segreto;
(14) c'è qualcuno in questa classe che non ha un atteggiamento positivo.

***Esercizio* 1.25.** [‡]
Trovare se possibile un controesempio a ciascuna delle seguenti affermazioni, se l'universo del discorso è l'insieme dei numeri interi:

a) $\forall x\,(x^2 \geqslant x)$ *b*) $\forall x\,(x > 0 \vee x < 0)$
c) $\forall x\,(x = 1)$

***Esercizio* 1.26.** [‡]
Trovare se possibile un controesempio a ciascuna delle seguenti affermazioni, se l'universo del discorso è l'insieme dei numeri reali:

a) $\forall x\,(x^2 \neq x)$ *b)* $\forall x\,(x^2 \neq 2)$
c) $\forall x\,(|x| > 0)$

***Esercizio* 1.27.** [‡]
Tradurre le seguenti affermazioni in linguaggio corrente, con l'universo del discorso che consiste dei numeri reali:

(1) $\forall x \exists y\ (x < y)$;
(2) $\forall x \forall y\ (((x \geqslant 0) \wedge (y \geqslant 0)) \Rightarrow (xy \geqslant 0))$;
(3) $\forall x \forall y \exists z\ (xy = z)$;
(4) $\forall x \forall y\ (xy = y)$;
(5) $\forall x \forall y\ (((x \geqslant 0) \wedge (y < 0)) \Rightarrow (x - y > 0))$;
(6) $\forall x \forall y \exists z\ (x = y + z)$.

***Esercizio* 1.28.** [‡]
Sia $L(x, y)$ l'affermazione *"x ama y"*, e l'universo del discorso per x ed y sia l'insieme di tutte le persone del mondo. Usare i quantificatori per esprimere formalmente ciascuna delle seguenti affermazioni:

(1) Tutti amano Jerry;
(2) tutti amano qualcuno;
(3) c'è qualcuno che tutti amano;
(4) nessuno ama tutti;
(5) c'è qualcuno che Lydia non ama;
(6) c'è qualcuno che nessuno ama;
(7) c'è esattamente una persona che tutti amano;
(8) ci sono esattamente due persone che Lynn ama;
(9) tutti amano se stessi;
(10) c'è chi non ama altri che se stesso.

***Esercizio* 1.29.** [‡]
Esprimere ciascuna delle seguenti affermazioni usando operatori logici e matematici, predicati e quantificatori, con universo del discorso costituito dai numeri interi:

(1) la somma di due interi negativi è negativa;
(2) la differenza di due interi positivi non è necessariamente positiva;
(3) la somma dei quadrati di due interi è maggiore o uguale al quadrato della loro somma;
(4) il valore assoluto del prodotto di due interi è il prodotto dei loro valori assoluti;
(5) il prodotto di due interi negativi è positivo;
(6) la media di due interi positivi è positiva;
(7) la differenza di due interi negativi non è necessariamente negativa;
(8) il valore assoluto della somma di due interi non eccede la somma dei loro valori assoluti;
(9) ogni intero positivo è la somma dei quadrati di quattro interi;
(10) c'è un intero positivo che non è somma di tre quadrati.

***Esercizio* 1.30.** [‡]
Sia $Q(x, y)$ l'affermazione "$x + y = x - y$". Se l'universo del discorso per ambo le variabili è l'insieme dei numeri interi, decidere il valore di verità di

(1) $Q(1, 1)$;
(2) $Q(2, 0)$;

(3) $\forall y\, Q(1,y)$;
(4) $\exists x\, Q(x,2)$;
(5) $\exists x \exists y\, Q(x,y)$;
(6) $\forall x \exists y\, Q(x,y)$;
(7) $\exists y \forall x\, Q(x,y)$;
(8) $\forall y \exists x\, Q(x,y)$;
(9) $\forall x \forall y\, Q(x,y)$.

***Esercizio* 1.31.** [‡]
Determinare il valore di verità di ciascuna delle seguenti affermazioni, sapendo che l'universo del discorso per tutte le variabili è l'insieme dei numeri interi:

(1) $\forall n \exists m\, (n^2 < m)$;
(2) $\exists n \forall m\, (n < m^2)$;
(3) $\forall n \exists m\, (n + m = 0)$;
(4) $\exists n \forall m\, (nm = m)$;
(5) $\exists n \exists m\, (n^2 + m^2 = 5)$;
(6) $\exists n \exists m\, (n^2 + m^2 = 6)$;
(7) $\exists n \exists m\, (n + m = 4 \wedge n - m = 1)$;
(8) $\exists n \exists m\, (n + m = 4 \wedge n - m = 2)$;
(9) $\forall n \forall m \exists p\, (p = (m + n)/2)$.

***Esercizio* 1.32.** [‡]
Determinare il valore di verità di ciascuna delle seguenti affermazioni, sapendo che l'universo del discorso per tutte le variabili è l'insieme dei numeri reali:

(1) $\forall x \exists y\, (x^2 = y)$;
(2) $\forall x \exists y\, (x = y^2)$;
(3) $\exists x \forall y\, (xy = 0)$;
(4) $\exists x \exists y\, (x + y \neq y + x)$;
(5) $\forall x\, (x \neq 0 \Rightarrow \exists y\, (xy = 1))$;
(6) $\forall x \exists y\, (x + y = 1)$;
(7) $\exists x \exists y\, (x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$;
(8) $\forall x \exists y\, (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$;
(9) $\forall x \forall y \exists z\, (z = (x + y)/2)$.

***Esercizio* 1.33.** [‡]
Esprimere simbolicamente le seguenti proposizioni e poi effettuarne la negazione. Infine, esprimere ciascuna di esse in lingua italiana.

(1) Nessuno ha perso più di mille euro giocando al lotto;
(2) c'è uno studente in questa classe che ha chiacchierato con esattamente un altro studente;
(3) nessuno studente in questa classe ha mandato e-mail a esattamente due altri studenti di questa classe;
(4) qualche studente ha risolto tutti gli esercizi di questa dispensa;
(5) nessuno studente ha risolto almeno un esercizio di ogni capitolo del libro di testo di Matematica Discreta;
(6) qualcuno ha visitato tutti i Paesi del mondo eccetto la Libia;
(7) nessuno ha scalato tutte le vette dell'Himalaya;
(8) ogni attore cinematografico o ha girato un film con Kevin Bacon oppure ha girato un film con un attore che ha girato un film con Kevin Bacon;
(9) a tutti gli studenti di questa classe piace la Matematica;
(10) c'è uno studente in questa classe che non ha mai visto un computer;
(11) c'è uno studente di questa classe che è stato in almeno una stanza di ogni edificio del campus.

***Esercizio* 1.34.** [‡]
Trovare se possibile un controesempio alle seguenti affermazioni, dove l'universo del discorso è l'insieme dei numeri interi:

(1) $\forall x \forall y\, (x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$;
(2) $\forall x \exists y\, (y^2 = x)$;
(3) $\forall x \forall y\, (xy \geqslant x)$;
(4) $\forall x \exists y\, (x = 1/x)$;
(5) $\forall x \exists y\, (y^2 - x < 100)$;
(6) $\forall x \forall y\, (x^2 \neq y^3)$.

Parte 2. Insiemistica

***Esercizio* 2.1.** [†]
Spiegare perchè

$$\{x \mid x \text{ è divisibile per } u\} = \{y \mid y \text{ è divisibile per } u\}$$

mentre

$$\{x \mid x \text{ è divisibile per } y\} \neq \{y \mid y \text{ è divisibile per } y\}.$$

***Esercizio* 2.2.** [♣]
Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

$$A = \{1,\ 2,\ 3\},\ B = \{3,\ 2,\ 1,\ 3\},\ C = \{3,\ 1,\ 2,\ 3\},\ D = \{1,\ 2,\ 2,\ 3\}.$$

***Esercizio* 2.3.** [†]
Spiegare perchè è vero che

$$\{y \mid \text{esiste un intero } x \text{ tale che } y = 2x\} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

***Esercizio* 2.4.** [♣]
Sia $A = \{1, \{1\}, \{2\}\}$. Quale delle seguenti affermazioni sono vere?

a) $1 \in A$	*b*) $\{1\} \in A$	*c*) $\{1\} \subseteq A$	*d*) $\{\{1\}\} \subseteq A$
e) $\{2\} \in A$	*f*) $\{2\} \subseteq A$	*g*) $\{\{2\}\} \subseteq A$	*h*) $\{\{2\}\} \subsetneqq A$

E se invece $A = \{1, 2, \{2\}\}$?

***Esercizio* 2.5.** Per quali $A \subseteq \mathbb{N}$ risulta $A \subseteq]2, 5[$?

***Esercizio* 2.6.** [‡]
Determinare se le seguenti affermazioni sono vere o false

(1) $0 \in \{\varnothing\}$
(2) $\varnothing \in \{0\}$
(3) $\{0\} \subseteq \varnothing$
(4) $\varnothing \subseteq \{0\}$
(5) $\{0\} \in \{0\}$
(6) $\{0\} \subseteq \{0\}$;
(7) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$
(8) $\varnothing \in \{\varnothing\}$
(9) $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
(10) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$
(11) $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$
(12) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
(13) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$
(14) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}$
(15) $x \in \{x\}$
(16) $\{x\} \subseteq \{x\}$
(17) $\{x\} \in \{x\}$
(18) $\{x\} \in \{\{x\}\}$
(19) $\varnothing \subseteq \{x\}$
(20) $\varnothing \in \{x\}$.

***Esercizio* 2.7.** [‡]
Elencare gli elementi dei seguenti insiemi:

(1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$;
(2) $\{x \mid x \text{ è un intero positivo } < 12\}$;
(3) $\{x \mid x \text{ è il quadrato di un intero e } x < 100\}$;
(4) $\{x \mid x \text{ è un intero tale che } x^2 = 2\}$.

***Esercizio* 2.8.** [♣]
Determinare tutti gli elementi in ciascuno dei seguenti insiemi:

(1) $\{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
(2) $\{n^3 + n^2 \mid n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$;
(3) $\{1/(n^2 + n) \mid n$ è un intero positivo dispari e $n \leqslant 11\}$;
(4) $\{n + (1/n) \mid n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}\}$.

***Esercizio* 2.9.** [‡]
Per ciascuno dei seguenti insiemi, stabilire se 2 è un elemento dell'insieme:

(1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x$ è un intero maggiore di $1\}$;
(2) $\{x \in \mathbb{R} \mid x$ è il quadrato di un intero$\}$;
(3) $\{2, \{2\}\}$;
(4) $\{\{2\}, \{\{2\}\}\}$;
(5) $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$;
(6) $\{\{\{2\}\}\}$.

***Esercizio* 2.10.** [†]
Scrivere almeno 10 elementi dell'insieme $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

***Esercizio* 2.11.** [†]
Scrivere almeno 10 elementi dell'insieme $\{(2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

***Esercizio* 2.12.** [†]
Dare un esempio di tre insiemi A, B, C tali che $A \in B$, $B \in C$ ma $A \notin C$.

***Esercizio* 2.13.** [†]
Scrivere almeno 10 elementi dell'insieme

$$\left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a + b = 1 \text{ e } a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

***Esercizio* 2.14.** [†]
Scrivere qualche elemento dell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \text{ e } y = 3x\}.$$

***Esercizio* 2.15.** [†]
Siano dati gli oggetti a, b, c, d, non necessariamente distinti, provare che

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \iff a = c \text{ e } b = d.$$

***Esercizio* 2.16.** [♣]
Si considerino i seguenti sei sottinsiemi di $\mathbb{Z}$:

$$A = \{2m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\} \qquad B = \{2n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\} \qquad C = \{2p - 3 \mid p \in \mathbb{Z}\}$$
$$D = \{3r + 1 \mid r \in \mathbb{Z}\} \qquad E = \{3s + 2 \mid s \in \mathbb{Z}\} \qquad F = \{3t - 2 \mid t \in \mathbb{Z}\}.$$

Quale delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono invece false?

$a)$ $A = B$ $\qquad$ $b)$ $A = C$ $\qquad$ $c)$ $B = C$
$d)$ $D = E$ $\qquad$ $e)$ $D = F$ $\qquad$ $f)$ $E = F$.

***Esercizio* 2.17.** [♣]
Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determinare il numero di

(1) sottinsiemi di A;
(2) sottinsiemi non vuoti di A;
(3) sottinsiemi propri di A;
(4) sottinsiemi propri non vuoti di A;
(5) sottinsiemi di A contenenti tre elementi;
(6) sottinsiemi di A contenenti 1 e 2;
(7) sottinsiemi di A contenenti cinque elementi, tra cui 1 e 2;

(8) sottinsiemi propri di A contenenti 1 e 2;
(9) sottinsiemi di A con un numero pari di elementi;
(10) sottinsiemi di A con un numero dispari di elementi;
(11) sottinsiemi di A con un numero dispari di elementi che includono l'elemento 3.

***Esercizio* 2.18.** [‡]
Determinare l'insieme delle parti di $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

***Esercizio* 2.19.** [‡]
Determinare quali tra i seguenti insiemi sono l'insieme delle parti di qualche insieme:

a) $\varnothing$ *b)* $\{\varnothing, \{a\}\}$
c) $\{\varnothing, \{a\}, \{\varnothing, a\}\}$ *d)* $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

***Esercizio* 2.20.** [♣]
Quali dei seguenti insiemi sono non vuoti?

a) $\{x \mid x \in \mathbb{N},\ 2x + 7 = 3\}$ **b)** $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3x + 5 = 9\}$
c) $\{x \mid x \in \mathbb{Q},\ x^4 + 4 = 6\}$ **d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 = 6\}$
e) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 + 5 = 4\}$ **f)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 3 = 0\}$
g) $\{x \mid x \in \mathbb{C},\ x^2 + 3x + 3 = 0\}$

***Esercizio* 2.21.** [♣]
Sia $\mathscr{I} = \mathbb{R}^+ (=]0, +\infty[)$ e per ogni $r \in \mathscr{I}$ sia $A_r := [-r, r]$. Provare che

$$\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i = \mathbb{R}, \qquad \bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i = \{0\}.$$

***Esercizio* 2.22.** [†]
Verificare ciascuna delle seguenti affermazioni:
(1) $\{x \in \mathbb{Z} \mid$ esiste un intero y tale che $x = 6y\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid$ esistono degli interi u e v tali che $x = 2u$ e $x = 3v\}$
(2) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}$ tale che $x = y^2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
(3) $\{x \in \mathbb{Z} \mid$ per un opportuno intero y è $x = 6y\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid$ per un opportuno intero y è $x = 2y\}$.

***Esercizio* 2.23.** [♣]
Siano A, B, C, D, E i seguenti sottinsiemi dell'insieme $\mathbb{Z}$, visto come insieme universo:

$A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ $B = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ $C = \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
$D = \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ $E = \{8n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

.

(1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false?

i) $E \subseteq C \subseteq A$ *ii)* $A \subseteq C \subseteq E$ *iii)* $B \subseteq D$
iv) $D \subseteq B$ *v)* $D \subseteq A$ *vi)* $\mathscr{C}(D) \subseteq \mathscr{C}(A)$

(2) Determinare ognuno dei seguenti insiemi:

i) $C \cap E$ *ii)* $B \cup D$ *iii)* $A \cap B$
iv) $B \cap D$ *v)* $\mathscr{C}(A)$ *vi)* $A \cap E$

***Esercizio* 2.24.** [†]
Assegnati degli insiemi A, B e C, provare ognuna delle seguenti affermazioni:
(1) $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$;

(2) $A \subseteq B$ e $B \subsetneqq C \Rightarrow A \subsetneqq C$;
(3) $A \subsetneqq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subsetneqq C$;
(4) $A \subsetneqq B$ e $B \subsetneqq C \Rightarrow A \subsetneqq C$.

***Esercizio* 2.25.** [†]
Dare un esempio di insiemi A, B, C, D, E che soddisfano tutte le seguenti condizioni simultaneamente:

$$A \subsetneqq B,\ B \in C,\ C \subsetneqq D,\ D \subsetneqq E.$$

***Esercizio* 2.26.** [†]
Quali delle seguenti sono vere per tutti gli insiemi A, B e C?

(1) Se $A \notin B$ e $B \notin C$ allora $A \notin C$;
(2) se $A \neq B$ e $B \neq C$ allora $A \neq C$;
(3) se $A \in B$ e $B \nsubseteq C$ allora $A \notin C$;
(4) se $A \subsetneqq B$ e $B \subseteq C$ allora $C \nsubseteq A$;
(5) se $A \subseteq B$ e $B \in C$ allora $A \notin C$.

***Esercizio* 2.27.** [†]
Provare che per ogni insieme A risulta $A \subseteq \varnothing \iff A = \varnothing$.

***Esercizio* 2.28.** [♣]
Dato un insieme universo U, siano $A, B \subseteq U$. Chi è $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$? Provare la propria affermazione.

***Esercizio* 2.29.** [♣]
Siano $A, B \subseteq U$. Provare o confutare le seguenti affermazioni:

(1) $\wp(A \cup B) = \wp(A) \cup \wp(B)$;
(2) $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$.

***Esercizio* 2.30.** [†]
Siano $A_1, \ldots, A_n$ insiemi. Provare che

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_1 \iff A_1 = A_2 = \cdots = A_n.$$

***Esercizio* 2.31.** [†]
Dare numerosi esempi di un insieme X tale che ogni elemento di X è un sottinsieme di X.

***Esercizio* 2.32.** [†]
Elencare gli elementi di $\wp(A)$ per $A = \{\{1,2\}, \{3\}, 1\}$.

***Esercizio* 2.33.** [†]
Provare che per ogni A, B insiemi risulta

$$\varnothing \subseteq A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B.$$

***Esercizio* 2.34.** [†]
Fissiamo $\mathbb{Z}$ come insieme universo, e consideriamo i suoi sottinsiemi

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{ per qualche intero positivo } y,\ x = 2y\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{ per qualche intero positivo } y,\ x = 2y - 1\} \\ C &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 10\}. \end{aligned}$$

Descrivere gli insiemi $\mathscr{C}(A)$, $\mathscr{C}(A \cup B)$, $A \setminus \mathscr{C}(C)$ e $C \setminus \mathscr{C}(A \cup B)$.

***Esercizio* 2.35.** [†]
Indichiamo con $\mathbb{Z}^+$ l'insieme degli interi positivi, e consideriamone i seguenti sottinsiemi:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid \text{ per qualche intero } y,\ x = 2y\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid \text{ per qualche intero } y,\ x = 2y+1\} \\ C &= \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid \text{ per qualche intero } y,\ x = 3y\}. \end{aligned}$$

(1) Descrivere $A \cap C$, $B \cup C$ e $B \setminus C$;
(2) verificare che $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

***Esercizio* 2.36.** [†]
Se A è un qualunque insieme, chi sono i seguenti insiemi?

$$A \cap \varnothing,\ A \cup \varnothing,\ A \setminus \varnothing,\ A \setminus A,\ \varnothing \setminus A.$$

***Esercizio* 2.37.** [†]
Determinare gli insiemi $\varnothing \cap \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$.

***Esercizio* 2.38.** [†]
Sia U l'insieme universo, e indichiamo con A, B degli insiemi. Provare che
(1) $(\forall A\ A \cup B = A) \iff B = \varnothing$;
(2) $(\forall A\ A \cap B = A) \iff B = U$;
(3) se $A \cup B = U$ e $A \cap B = \varnothing$ allora $B = \mathscr{C}(A)$.

***Esercizio* 2.39.** [†]
Siano A e B degli insiemi. Provare che le seguenti tre affermazioni sono tra loro equivalenti:
(1) $A \subseteq B$;
(2) $A \cup B = B$;
(3) $A \cap B = A$.

***Esercizio* 2.40.** [♣]
Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, sia $A_n := \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$. Determinare

$$\bigcup_{n=1}^{7} A_n,\ \bigcap_{n=1}^{11} A_n,\ \bigcup_{n=1}^{m} A_n,\ \bigcap_{n=1}^{m} A_m\ (m \in \mathbb{N}^*).$$

***Esercizio* 2.41.** [♣]
Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ sia $B_n := \{n+1, n+2, n+3, \dots\}$. Determinare

$$\bigcup_{n=1}^{8} B_n,\ \bigcap_{n=3}^{12} B_n,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,\ \bigcap_{n=1}^{m} B_n\ (m \in \mathbb{N}^*).$$

***Esercizio* 2.42.** [♣]
Sia $U := \mathbb{R}$ l'insieme universo, e sia $\mathscr{I} = \mathbb{N}^*$. Per ogni $n \in \mathscr{I}$, sia $A_n := [-2n, 3n]$. Determinare ciascuno dei seguenti insiemi:

a) A_3 *b)* A_4 *c)* $A_3 \setminus A_4$ *d)* $(A_3 \setminus A_4) \cup (A_4 \setminus A_3)$

e) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{7} A_n$ *f)* $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{7} A_n$ *g)* $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ *h)* $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

***Esercizio* 2.43.** Siano $A := [1, +\infty[$, $B :=]-\infty, -3[$,

$$C := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x-1}{x+3} \geqslant 0 \right\},\ D := \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x+3) \geqslant 0\}.$$

Dire se $A \cup B = C$ o $A \cup B = D$.

***Esercizio* 2.44.** Siano $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geqslant 1\}$, $B := \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$, $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 3\}$ e $D := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$. Determinare $A \cap B$, $A \cap C$ e $A \cap D$.

***Esercizio* 2.45.** [†]
Sia $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in \mathscr{I}\}$ una famiglia di sottinsiemi di U, e sia $B \subseteq U$. Provare che

(1) $B \cap \left(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i \right) = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} (B \cap A_i)$;

(2) $B \cup \left(\bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i \right) = \bigcap_{i \in \mathscr{I}} (B \cup A_i)$;

(3) $\mathscr{C} \left(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i \right) = \bigcap_{i \in \mathscr{I}} \mathscr{C}(A_i)$;

(4) $\mathscr{C} \left(\bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i \right) = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} \mathscr{C}(A_i)$;

(5) se $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{I}$ allora $\bigcup_{j \in \mathscr{J}} A_j \subseteq \bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i$;

(6) se $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{I}$ allora $\bigcap_{j \in \mathscr{J}} A_j \supseteq \bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i$;

Parte 3. Relazioni e funzioni

1. Generalità

***Esercizio* 3.1.** [†]
Si consideri su $\mathbb{R}$ la relazione definita da $x\mathscr{R}y :\iff x = y$. Interpretando $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come l'insieme dei punti del piano, disegnare $\mathscr{R}$.

***Esercizio* 3.2.** [†]
Si consideri su $\mathbb{R}$ la relazione definita da $x\mathscr{R}y :\iff x \leqslant y$. Interpretando $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come l'insieme dei punti del piano, disegnare $\mathscr{R}$.

***Esercizio* 3.3.** [†]
Si consideri su $\mathbb{R}$ la relazione definita da

$$x\mathscr{R}y :\iff (0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ o } 0 \leqslant y \leqslant 1).$$

Interpretando $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come l'insieme dei punti del piano, disegnare $\mathscr{R}$.

***Esercizio* 3.4.** [†]
Interpretando $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come l'insieme dei punti del piano, disegnare $\mathscr{R}$ per ciascuna delle seguenti relazioni:

(1) $x\mathscr{R}y :\iff x^2 + 4y^2 = 1$;
(2) $x\mathscr{R}y :\iff x^2 = y^2$;
(3) $x\mathscr{R}y :\iff |x| + 2|y| = 1$;
(4) $x\mathscr{R}y :\iff x^2 + y^2 < 1 \text{ e } x > 0$;
(5) $x\mathscr{R}y :\iff y \geqslant 0 \text{ e } y \leqslant x \text{ e } x + y \leqslant 1$.

2. Relazioni d'equivalenza

***Esercizio* 3.5.** [†]
Se $\mathscr{R}$ è una relazione su $\mathbb{R}^+$ (insieme dei numeri reali positivi) allora possiamo visualizzare $\mathscr{R}$ come insieme di punti del primo quadrante del piano cartesiano. Nel corrispondente disegno, come ci accorgiamo che

(1) $\mathscr{R}$ è riflessiva?
(2) $\mathscr{R}$ è simmetrica?
(3) $\mathscr{R}$ è transitiva?

***Esercizio* 3.6.** [†]
L'insieme $\mathscr{P} := \{\{1,3,4\},\{2,7\},\{5,6\}\}$ è una partizione di $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Disegnare (nel piano cartesiano) la relazione di equivalenza associata a $\mathscr{P}$.

***Esercizio* 3.7.** [†]
Siano $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{S}$ relazioni di equivalenza su un insieme A. Provare che $\mathscr{T} = \mathscr{R} \cap \mathscr{S}$ è una relazione di equivalenza su A.

***Esercizio* 3.8.** [†]
Sia $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza su X e sia Y un insieme. Provare che se $X \cap Y$ è non vuoto allora $\mathscr{R} \cap (Y \times Y)$ è una relazione di equivalenza su $X \cap Y$.

***Esercizio* 3.9.** [†]
Dare esempi di relazioni su X che siano, rispettivamente,

(1) riflessiva e simmetrica, ma non transitiva;
(2) riflessiva e transitiva, ma non simmetrica;
(3) simmetrica e transitiva, ma non riflessiva

scegliendo opportunamente X.

***Esercizio* 3.10.** [†]
Fissiamo un insieme non vuoto A e sia $\mathscr{R}$ una relazione su A riflessiva e transitiva. Definiamo inoltre su A la relazione

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x\mathscr{R}y \text{ e } y\mathscr{R}x.$$

(1) Provare che $\sim$ è una relazione di equivalenza su A.
(2) Indicando con $[a]$ la classe di $\sim$-equivalenza di $a \in A$, definiamo in $A/\sim$ la seguente relazione:

$$[a]\mathscr{S}[b] \;:\Longleftrightarrow\; a\mathscr{R}b.$$

Provare che questa relazione è indipendente da a e b, nel senso che se $a' \in [a]$, $b' \in [b]$ e $a\mathscr{R}b$ allora $a'\mathscr{R}b'$.
(3) Provare che $\mathscr{S}$ è riflessiva e transitiva. Provare inoltre che $\mathscr{S}$ è antisimmetrica.

3. Funzioni

Notazione: se $f : A \to B$ è una funzione e $S \subseteq A$, si conviene di scrivere $f(S) := \{f(s) \mid s \in S\}$, che è un sottinsieme di B. Allo stesso modo, se $T \subseteq B$, si conviene di scrivere $f^{-1}(T) := \{x \in A \mid f(x) \in T\}$, ottenendo un sottinsieme di A. Ciò generalizza agli insiemi la notazione naturale per le immagini $f(x)$ e le controimmagini $f^{-1}(y)$ di elementi del dominio ($x \in A$) e del codominio ($y \in B$). Ricordiamo che nel caso particolare in cui $X = A$ il sottinsieme $f(A)$ di B si dice l'immagine della funzione. Naturalmente, invece, $f^{-1}(B) = A$.

***Esercizio* 3.11.** [‡]
Perchè f NON è una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ se

(1) $f(x) = 1/x$?
(2) $f(x) = \sqrt{x}$?
(3) $f(x) = \pm\sqrt{x^2+1}$?

***Esercizio* 3.12.** [‡]
Dire se f è una funzione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ se

(1) $f(n) = \pm n$;
(2) $f(n) = \sqrt{n^2+1}$;
(3) $f(n) = 1/(n^2-4)$.

***Esercizio* 3.13.** [†]
Sia $f : A \to B$ una funzione. Provare che se $X, Y \subseteq A$ allora

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y), \qquad f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y).$$

Provare che in generale l'inclusione nella seconda scrittura è stretta (cioè che in generale vale $\subsetneqq$).

***Esercizio* 3.14.** [‡]
Sia $A = \{a, b, c, d\}$. Determinare quali delle funzioni $f : A \to A$ di seguito sono iniettive:

(1) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$;
(2) $f(a) = b$, $f(b) = b$, $f(c) = d$, $f(d) = c$;
(3) $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$, $f(d) = d$.

Quali tra esse sono suriettive?

***Esercizio* 3.15.** [‡]
Quali tra le seguenti funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ sono iniettive? Quali suriettive?

(1) $f(n) = n - 1$;
(2) $f(n) = n^2 + 1$;
(3) $f(n) = n^3$;

***Esercizio* 3.16.** [‡]
Determinare quali tra le seguenti funzioni $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sono suriettive:

(1) $f(m, n) = 2m - n$;
(2) $f(m, n) = m^2 - n^2$;
(3) $f(m, n) = m + n + 1$;
(4) $f(m, n) = |m| - |n|$;
(5) $f(m, n) = m^2 - 4$;
(6) $f(m, n) = m + n$;
(7) $f(m, n) = m^2 + n^2$;
(8) $f(m, n) = m$;
(9) $f(m, n) = |n|$;
(10) $f(m, n) = m - n$.

***Esercizio* 3.17.** [‡]
Dare un esempio di una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ che sia

(1) iniettiva ma non suriettiva;
(2) suriettiva ma non iniettiva;
(3) bigettiva (ma diversa dall'identità);
(4) nè iniettiva nè suriettiva.

***Esercizio* 3.18.** [‡]
Dare un esempio di una funzione da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$, esibendo una esplicita formula per la sua legge di formazione, che sia

(1) iniettiva ma non suriettiva;
(2) suriettiva ma non iniettiva;
(3) bigettiva (ma diversa dall'identità);
(4) nè iniettiva nè suriettiva.

***Esercizio* 3.19.** [†]
Dare un esempio di una funzione suriettiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

***Esercizio* 3.20.** [‡]
Determinare quali tra le seguenti funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono bigettive:

(1) $f(x) = -3x + 4$;
(2) $f(x) = -3x^2 + 7$;
(3) $f(x) = (x + 1)/(x^2 + 2)$;
(4) $f(x) = x^5 + 1$;
(5) $f(x) = 2x + 1$;
(6) $f(x) = x^2 + 1$;
(7) $f(x) = x^3$;
(8) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$.

***Esercizio* 3.21.** [†]
Provare che se $X \subseteq A$ allora $id_X = (id_A)_{|X}$ (restrizione di id_A ad X).

***Esercizio* 3.22.** [†]
Se X ha m elementi e Y ha n elementi, quante funzioni $f : X \to Y$ possiamo scrivere? Quanti elementi di $\wp(X \times Y)$ sono funzioni?

***Esercizio* 3.23.** [†]
Dare esempi di una funzione $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$

(1) che sia iniettiva ma non suriettiva;

(2) che sia suriettiva ma non iniettiva.

***Esercizio* 3.24.** [†]
Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Provare che se una funzione $f : A \to A$ è iniettiva, allora è anche suriettiva. Provare che se $g : A \to A$ è suriettiva, allora è anche iniettiva.

***Esercizio* 3.25.** [†]
Provare che una funzione $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se $\forall\, X, Y \subseteq A$ risulta $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

***Esercizio* 3.26.** [†]
Provare che una funzione $f : A \to B$ è suriettiva se e solo se $\forall X \subseteq A$ risulta $f(A \setminus X) \supseteq B \setminus f(X)$.

***Esercizio* 3.27.** [†]
Provare che una funzione $f : A \to B$ è bigettiva se e solo se $\forall X \subseteq A$ risulta $f(A \setminus X) = B \setminus f(X)$.

***Esercizio* 3.28.** [†]
Provare che la funzione $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & 2x+1 \end{array}$ è invertibile ed esibire la sua funzione inversa.

***Esercizio* 3.29.** [‡]
Determinare le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$ dove f e g sono le funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definite da $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 2$.

***Esercizio* 3.30.** [†]
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$x \to \sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{1 - x}}.$$

Scrivere f come composizione di quattro funzioni, nessuna delle quali sia $id_{\mathbb{R}}$.

***Esercizio* 3.31.** [‡]
Siano f e g funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definite da $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, dove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sono delle costanti. Determinare per quali valori di esse risulta $f \circ g = g \circ f$.

***Esercizio* 3.32.** [†]
Sia $f : A \to B$ e sia X un sottinsieme non vuoto di A. Provare che $f_{|X} = f \circ id_X$.

***Esercizio* 3.33.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2$. Determinare

a) $f^{-1}(\{1\})$ *b)* $f^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$ *c)* $f^{-1}(\{x \mid x > 4\})$.

***Esercizio* 3.34.** [‡]
Sia $f : A \to B$ una funzione, e siano $S, T \subseteq B$. Provare che
(1) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$;
(2) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$.

***Esercizio* 3.35.** [†]
Siano A, B e C insiemi non vuoti e siano $f : A \to B$, $g : B \to C$. Provare che

(1) se f e g sono iniettive, anche $g \circ f$ è iniettiva;
(2) se f e g sono suriettive, anche $g \circ f$ è suriettiva;
(3) se f e g sono invertibili, anche $g \circ f$ è invertibile e in tal caso $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

***Esercizio* 3.36.** [‡]
Sia U l'insieme universo. Per ogni sottinsieme $S \subseteq U$ è possibile costruire la <u>*funzione caratteristica di S*</u>, che è la funzione

$$\begin{array}{cccc} \chi_S: & U & \rightarrow & \{0,1\} \\ & u & \longrightarrow & \begin{cases} 0 & \text{se } u \notin S \\ 1 & \text{se } u \in S \end{cases} \end{array}.$$

Provare che per ogni $A, B \subseteq U$ e per ogni $x \in U$ risulta

(1) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
(2) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
(3) $\chi_{\mathscr{C}(A)}(x) = 1 - \chi_A(x)$.

***Esercizio* 3.37.** [†]
Sia $f : A \rightarrow A$ una funzione. Si pone $f^0 := id_A$ e, per ogni $n \geqslant 1$, si pone $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}$. Provare che se esiste $n \in \mathbb{N}^*$ tale che $f^n = id_A$, allora f è bigettiva.

Parte 4. Induzione

***Esercizio* 4.1.** Provare le seguenti uguaglianze:

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = n^2+4n+4,\ n \in \mathbb{N};$
(2) $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{n}(4k^2-k+1) = 4n^3+\frac{9}{2}n^2+\frac{7}{2}n,\ n \in \mathbb{N}^*;$
(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+2}2(k-1) = n^2+3n,\ n \in \mathbb{N}^*;$
(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2,\ n \in \mathbb{N}^*;$
(5) $\displaystyle 3\sum_{k=2}^{n}k(k-1) = n(n^2-1),\ \mathbb{N} \ni n \geqslant 2;$
(6) $1+3n \leqslant 4^n,\ n \in \mathbb{N}^*;$
(7) $3^n > 1+2n,\ \mathbb{N} \ni n \geqslant 2;$
(8) $2^n > n^2+4n+5,\ \mathbb{N} \ni n \geqslant 7;$
(9) $2n^3-3n^2+n+31 \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N};$
(10) per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero n^5-n è un multiplo di 5;
(11) per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $n(2n^2-3n+1)$ è un multiplo di 6;
(12) per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $4n^3-3n^2-n$ è un multiplo di 6;
(13) per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $3^{2n}-1$ è un multiplo di 8.

***Esercizio* 4.2.** [♣]
Provare per induzione che per tutti gli $n \in \mathbb{N}^*$ risulta

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

***Esercizio* 4.3.** [♣]
Provare che per ogni $6 \leqslant n \in \mathbb{N}$ risulta $4n < n^2-7$.

***Esercizio* 4.4.** [♣]
Provare che ogni naturale $n \geqslant 14$ può essere ottenuto sommando solo degli 8 e/o dei 3.

***Esercizio* 4.5.** [♣]
Provare ognuna delle seguenti uguaglianze:

(1) $\displaystyle 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3};$
(2) $\displaystyle 1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6};$
(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1};$
(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}2^k = 2^n-1;$
(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2;$
(6) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$

***Esercizio* 4.6.** [♣]
Provare che per ogni $10 < n \in \mathbb{N}$ risulta $n - 2 < \dfrac{n^2 - n}{12}$.

***Esercizio* 4.7.** [♣]
Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 3 \Rightarrow 2^n < n!$[1]

***Esercizio* 4.8.** [♣]
Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 4 \Rightarrow n^2 < 2^n$.

***Esercizio* 4.9.** [♣]
Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 9 \Rightarrow n^3 < 2^n$.

***Esercizio* 4.10.** [‡]
Provare che per ogni $n \geqslant 2$ risulta $n! < n^n$.

***Esercizio* 4.11.** [♣]
Si considerino le seguenti quattro uguaglianze:

(1) $1 = 1$;
(2) $2 + 3 + 4 = 1 + 8$;
(3) $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 8 + 27$;
(4) $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 27 + 64$.

Congetturare una formula generale a partire da queste uguaglianze, e dimostrare la congettura.

***Esercizio* 4.12.** [♣]
Si considerino le seguenti sei uguaglianze:

(1) $1^2 + 0^2 = 1^2$	(3) $5^2 + 12^2 = 13^2$	(5) $9^2 + 40^2 = 41^2$
(2) $3^2 + 4^2 = 5^2$	(4) $7^2 + 24^2 = 25^2$	(6) $11^2 + 60^2 = 61^2$

Congetturare una formula generale suggerita da esse, e provarla.

***Esercizio* 4.13.** [‡]
Si consideri la seguente variante del gioco del Nim: si comincia con n fiammiferi posati su un tavolo. Due giocatori si alternano nel togliere, a ogni turno, uno, due o tre fiammiferi a scelta. Perde chi toglie l'ultimo fiammifero dal tavolo.

Provare che, a gioco corretto, chi inizia per secondo vince solo se $n = 4j + 1$ per qualche intero non negativo j, mentre negli altri casi ($n = 4j$, $n = 4j + 2$ e $n = 4j + 3$) vince il primo giocatore.

Suggerimento: *procedere per induzione completa.*

***Esercizio* 4.14.** [‡]
Provare per induzione che se n è un intero positivo allora

$$\sum_{\{a_1,\ldots,a_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} = n,$$

dove la sommatoria è effettuata su tutti i sottinsiemi non vuoti dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

Per chiudere, un esercizio semplice ma che può far rosicare parecchio, credetemi!

***Esercizio* 4.15.** [‡]
Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e scelti comunque $n + 1$ interi positivi, nessuno dei quali maggiore di $2n$, c'è almeno uno di essi che divide almeno un altro (diverso dal primo!) tra i numeri selezionati.

---

[1] ricordiamo che $n!$ è definito ricorsivamente da $0! := 0$ e $(n + 1)! := (n + 1) \cdot n!$ per $n \geqslant 1$.

Soluzioni

***Esercizio* 1.1.** (1), (4) e (5).

***Esercizio* 1.2.** (1)–V, (2)– F, (3)–V, (4)–F, (7)–V.

***Esercizio* 1.5.** (6) : $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

***Esercizio* 1.6.** (1)–F, (2)–F, (3)–V, (4)–F.

***Esercizio* 1.7.** (2) : $q \Rightarrow p$.

***Esercizio* 1.8.** Solo (2) e (5) sono false.

***Esercizio* 1.9.** Solo (1) e (6) sono false.

***Esercizio* 1.11.** Può prendere con certezza la strada a sinistra.

***Esercizio* 1.13.**

(1) A cavaliere, B furfante;
(2) A furfante, B cavaliere;
(3) entrambi sono furfanti;
(4) nulla si può dire;
(5) A è un furfante e B un cavaliere.

***Esercizio* 1.14.** Sono vere: 7, 8, 11, 12, 13, 14, 17 e 18.

***Esercizio* 1.15.** V,V e F.

***Esercizio* 1.16.** V,F,F,V.

***Esercizio* 1.19.** Sono false la c) e la f).

***Esercizio* 1.20.** False f) e g).

***Esercizio* 1.21.** Tutti veri.

***Esercizio* 1.22.** A mo' di esempio, vediamo una possibile formulazione del punto 2) nei due casi. Sia $A(x)$ l'affermazione *"la persona x è amichevole"*. Allora

- Se l'universo del discorso è l'insieme degli studenti della classe, la scrittura formale è $\forall x\ A(x)$.
- Se l'universo del discorso è l'insieme di tutte le persone, la scrittura formale è $\forall x\ (C(x) \Rightarrow A(x))$, dove $C(x)$ è l'affermazione *"la persona x è un elemento della vostra classe"*.

Da notare che l'istintiva $\forall x\ (C(x) \wedge A(x))$ è sbagliata: vorrebbe dire che ogni persona è nella vostra classe ed è amichevole.

***Esercizio* 1.23.** Siano $a(x) =$ *"x è tuo amico"* e $p(x) =$ *"x è perfetto"*. Allora

(1) $\forall x\, \neg p(x)$	(2) $\exists x\, \neg p(x)$	(3) $\forall x\, (a(x) \Rightarrow p(x))$
(4) $\exists x\, (a(x) \wedge p(x))$	(5) $\forall x\, (a(x) \wedge p(x))$	(6) $\exists x\, \neg(a(x) \wedge p(x))$.

***Esercizio* 1.25.** a) Non c'è controesempio; per b) e c) c'è 0.

***Esercizio* 1.26.** a) 1; b) $-\sqrt{2}$; c) 0.

***Esercizio* 1.28.**

1) $\forall x\, L(x, \text{Jerry})$	2) $\forall x \exists y\, L(x, y)$	3) $\exists y \forall x L(x, y)$
4) $\forall x\, \exists y\, \neg L(x, y)$	5) $\exists y\, \neg L(\text{Lydia}, y)$	6) $\exists y\, \forall x\, \neg L(x, y)$
7) $\exists! y\, \forall x\, L(x, y)$	8) $\exists!(y_1, y_2)\, (L(\text{Lynn}, y_1) \wedge L(\text{Lynn}, y_2))$	9) $\forall x\, L(x, x)$

Infine 10) $\exists x\ \Big(\forall y\ \big(y \neq x \Rightarrow \neg L(x, y)\big) \wedge L(x, x)\Big)$.

***Esercizio* 1.29.**

1) $\forall x\,\forall y\ (x<0\ \wedge y<0)\Rightarrow x+y<0$

2) $\exists x\,\exists y\ (x>0)\wedge(y>0)\wedge(x-y\leqslant 0)$

3) $\forall x\,\forall y\ x^2+y^2\geqslant(x+y)^2$

4) $\forall x\,\forall y\ \ |xy|=|x|\cdot|y|$

5) $\forall x\,\forall y\ (x<0\ \wedge y<0\Rightarrow xy>0)$

6) $\forall x\,\forall y\ (x>0\wedge y>0)\Rightarrow\dfrac{x+y}{2}>0$

7) simile al punto 2)

8) $\forall x\,\forall y\ \ |x+y|\leqslant|x|+|y|$

9) $\forall x\ x>0\Rightarrow(\exists c_1\,\exists c_2,\,\exists c_3\exists c_4\ x=c_1^2+c_2^2+c_3^2)$

10) $\exists x\,\forall c_1\,\forall c_2\,\forall c_3\ (x>0)\wedge(x\neq c_1^2+c_2^2+c_3^2)$

***Esercizio* 1.30.** Vere: (2), (5), (6), (7).

***Esercizio* 1.31.** False: (6), (7) e (9).

***Esercizio* 1.32.** False: (2), (4) e (7).

***Esercizio* 1.34.**

1) $x=-1,\ y=1$ 2) $x=-1$ 3) $x=1,\ y=-1$

4) $x=0$ 5) $x=-100$ 6) $x=y=1.$

***Esercizio* 2.2.** Tutti.

***Esercizio* 2.4.** Solo (f) è falsa. Se $A=\{1,\,2,\,\{2\}\}$ sono false solo (b) e (d).

***Esercizio* 2.5.** $\varnothing$, $\{3\}$, $\{4\}$ e $\{3,\,4\}$.

***Esercizio* 2.6.** Sono false: (1), (2), (3), (5), (10), (17), (20).

***Esercizio* 2.7.**

1) $1,\,-1$ 2) $1,\,2,\,\ldots,11$

3) $0,1,4,9,16,25,36,49,64,81$ 4) $\varnothing$

***Esercizio* 2.8.**

1) $\{0,2\}$ 3) $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{12},\frac{1}{30},\frac{1}{56},\frac{1}{90},\frac{1}{132}\right\}$

2) $\{0,2,12,36,80\}$ 4) $\left\{2,\frac{5}{2},\frac{10}{3},\frac{26}{5},\frac{50}{7}\right\}$

***Esercizio* 2.9.** Solo per (1) e (3).

***Esercizio* 2.10.** 0, 1, 4, 9, 16,. . .

***Esercizio* 2.11.** $(0,0),(2,3),(1,3/2),(2/3,1),(3,9/2),(2\sqrt{2},3\sqrt{3}),(4/3,2),\ldots$

***Esercizio* 2.12.** $A=\varnothing$, $B=\{\varnothing\}$, $C=\{\{\varnothing\}\}$.

***Esercizio* 2.13.** $+1,-1,0,1/2,5/4,4/3,7/9,\ldots$.[2]

***Esercizio* 2.14.** $(0,0)$, non ce ne sono altri.

***Esercizio* 2.16.** Sono false la d) e la f).

***Esercizio* 2.17.**

1) 128 2) 127 3) 127 4) 126

5) 35 6) 32 7) 10 8) 31

9) 64 10) 64 11) 32

***Esercizio* 2.18.** $\{\varnothing,\,\{\varnothing\},\,\{\{\varnothing\}\},\,\{\varnothing,\,\{\varnothing\}\}\}$.

[2] In realtà, è tutto $\mathbb{Q}$. Provarlo!

***Esercizio* 2.19.** Solo b) e d).

***Esercizio* 2.20.** d) e g).

***Esercizio* 2.23.**

(1) Sono vere i), iv), v).
(2) *i)* E; *ii)* B; *iii)* D; *iv)* D; *v)* $\{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$; *vi)* E.

***Esercizio* 2.26.** Solo la (4).

***Esercizio* 2.28.** $\varnothing$

***Esercizio* 2.29.** La (1) è falsa, la (2) vera.

***Esercizio* 2.31.** $X = \{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$, ...

***Esercizio* 2.32.** $\varnothing$, $\{1\}$, $\{\{3\}\}$, $\{\{1,\,2\}\}$, $\{\{1,\,2\},\,\{3\}\}$, $\{\{1,\,2\},\,1\}$, $\{\{3\},\,1\}$ e $\{\{1\,2\},\,\{3\},\,1\}$.

***Esercizio* 2.34.**

- $\mathscr{C}(A) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant 0\} \cup \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
- $\mathscr{C}(A \cup B) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant 0\}$;
- $A \setminus \mathscr{C}(C) = \{2k \mid \mathbb{Z} \ni k \geqslant 5\}$;
- $C \setminus \mathscr{C}(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

***Esercizio* 2.35.** $A \cap C = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$, cioè l'insieme dei multipli positivi di 6; $B \cup C = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{6k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$, cioè l'insieme degli interi positivi che sono dispari oppure sono multipli di 6; $B \setminus C = \{x \in B \mid 3 \nmid x\}$, cioè l'insieme degli interi positivi dispari che non sono multipli di 3. Esso può essere scritto come

$$\{6k+1 \mid 0 \leqslant k \in \mathbb{Z}\} \cup \{6k+5 \mid 0 \leqslant k \in \mathbb{Z}\}$$

***Esercizio* 2.36.** Sono, rispettivamente, gli insiemi $\varnothing$, A, A, $\varnothing$, $\varnothing$.

***Esercizio* 2.37.** Si ha, ordinatamente, $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\{\varnothing\}\}$ e $\{\varnothing\}$.

***Esercizio* 2.40.** Rispettivamente $\{1, \dots, 7\}$, $\{1\}$, A_m, $\{1\}$.

***Esercizio* 2.41.** Rispettivamente $\{2, 3, 4, \dots\}$, $\{13, 14, 15, \dots\}$, B_1, B_m.

***Esercizio* 2.42.**

a) $[-6, 9]$	*b*) $[-8, 12]$	*c*) $\varnothing$	*d*) $[-8, -6[\cup]9, 12]$
e) $[-14, 21]$	*f*) $[-2, 3]$	*g*) $\mathbb{R}$	*h*) $[-2, 3]$

***Esercizio* 2.43.** $A \cup B = C$.

***Esercizio* 2.44.**
$A \cap B =]-\infty, -3[$, $A \cap C = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$, $A \cap D =]-\infty, -1] \cup [1, 3[$.

***Esercizio* 3.12.** Solo (2) è una funzione.

***Esercizio* 3.14.** Solo la (1), in ambo i casi.

***Esercizio* 3.15.** (1) e (3) sono iniettive, e solo (1) è suriettiva.

***Esercizio* 3.16.** Le funzioni (2), (5), (7) e (9) non sono suriettive.

***Esercizio* 3.20.** Sono bigettive le funzioni (1), (4), (5) e (7).

***Esercizio* 3.22.** n^m.

***Esercizio* 3.28.** $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$.

***Esercizio* 3.29.** $f \circ g(x) = x^2 + 4x + 5$, $g \circ f(x) = x^2 + 3$.

***Esercizio* 3.30.** $f = d \circ c \circ b \circ a$ dove $a(x) = 1 - x$, $b(x) = \sqrt[3]{x}$, $c(x) = 1 + x$ e $d(x) = \sqrt[5]{x}$.

***Esercizio* 3.31.** Le costanti devono rispettare la relazione $bc - ad = b - d$.

***Esercizio* 3.33.**

$$a)\ \{-1, 1\} \qquad b)\ \{x \mid -1 < x < 1\} \qquad c)\ \{x \mid x < -2 \lor x > 2\}.$$

***Esercizio* 4.11.** La congettura è che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulti

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (n^2 + k) = n^3 + (n+1)^3.$$

Non c'è bisogno di usare l'induzione, ma solo le proprietà delle sommatorie:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+1} (n^2 + k) &= \sum_{k=1}^{2n+1} n^2 + \sum_{k=1}^{2n+1} k = n^2(2n+1) + \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} \\ &= 2n^3 + n^2 + (2n+1)(n+1) = 2n^3 + n^2 + 2n^2 + 3n + 1 \\ &= 2n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) \\ &= n^3 + (n+1)^3.\end{aligned}$$

***Esercizio* 4.12.** La congettura che si può ricavare dalle 6 uguaglianze è che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$(2n+1)^2 + \Big((2n+1)n + n\Big)^2 = \Big((2n+1)n + (n+1)\Big)^2.$$

Per provare che è vera, non c'è bisogno di usare l'induzione: basta ricordare lo sviluppo del quadrato di un binomio.

***Esercizio* 4.13.** Per $n = 1$ l'unico insieme che possiamo costruire con 2 interi positivi $\leqslant 2$ è $\{1, 2\}$, e quindi l'asserto è vero. Proviamo il passo induttivo: sia perciò $n \geqslant 1$ e scegliamo $n+2$ interi positivi tutti $\leqslant 2(n+1) = 2n+2$. Quindi, sia $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}, s_{n+2}\}$ con

$$1 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_{n+1} < s_{n+2} \leqslant 2n + 2.$$

Se $s_{n+2} < 2n+2$ allora $s_{n+1} < 2n+1$, e quindi $s_{n+1} \leqslant 2n$. Perciò $\{s_1, \dots, s_{n+1}\}$ è un insieme di $n+1$ elementi, tutti $\leqslant 2n$, e per ipotesi induttiva esistono $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$ tali che $s_i \mid s_j$.

Perciò supponiamo che $s_{n+2} = 2n+2$ e guardiamo a s_{n+1}. Se $s_{n+1} < 2n+1 \Rightarrow s_{n+1} \leqslant 2n$ e quindi, di nuovo, $\{s_1, \dots, s_{n+1}\}$ è un insieme di $n+1$ elementi tutti $\leqslant 2n$ e possiamo applicare di nuovo l'ipotesi induttiva.

Perciò possiamo supporre $s_{n+1} = 2n+1$ e $s_{n+2} = 2n+2$. Se $n+1 \in S$, abbiamo finito perchè $(n+1) \mid s_{n+2}$. Perciò supponiamo che $n+1 \notin S$. Notiamo che $n+1$ non può dividere alcun altro elemento di S. Ora: l'insieme $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ è un insieme di n numeri tutti $\leqslant 2n$, e non lo possiamo usare direttamente perchè ci servirebbe che tutti i suoi elementi fossero $\leqslant 2(n-1)$, non $\leqslant 2n$. Però, l'insieme $S \cup \{n+1\}$ è un insieme di $n+1$ elementi, tutti $\leqslant 2n$ e, per ipotesi induttiva, esistono due suoi elementi a, b tali che $a \mid b$. Certamente non può essere $a = n+1$ per quanto detto prima. Se anche $b \neq n+1$, abbiamo trovato due elementi di S tali che $a \mid b$. Se invece $b = n+1$, allora è vero che b non è nell'insieme S, però $a \mid n+1$ e $n+1 \mid s_{n+2}$ e così a e s_{n+2} sono due elementi di S tali che $a \mid s_{n+2}$.

Riferimenti bibliografici

[♣] Ralph P. Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics. An introduction*, 3-rd Edition, Addison–Wesley Publishing Company (1994)

[‡] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 5-th Edition, McGraw–Hill (2003)

[†] Robert R. Stoll, *Set Theory and Logic*, Dover Publications Inc., New York (1979)