Appunti sulle iperquadriche per gli studenti del corso di Geometria 3

A. Lotta

A.A. 2021/22

1 Richiami sulle forme quadratiche

Nel seguito denoteremo con $\mathbb{K}$ il campo dei reali o dei complessi. Dato uno spazio vettoriale V di dimensione $n \geq 1$ su $\mathbb{K}$, una forma quadratica è un'applicazione $q : V \to \mathbb{K}$ del tipo

$$q(v) = b(v, v)$$

dove $b : V \times V \to \mathbb{K}$ è una forma bilineare simmetrica, detta associata a q. Com'è noto, q determina completamente b mediante la formula di polarizzazione:

$$b(v, w) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v)).$$

La forma b verrà denotata anche con b_q. L'insieme $Q(V)$ della forme quadratiche su V è uno spazio vettoriale di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$, canonicamente isomorfo allo spazio $Bil_s(V)$ delle forme bilineari simmetriche.

Ricordiamo che per ogni base $\mathfrak{B}$ ha luogo la matrice $M_{\mathfrak{B}}(q) = M_{\mathfrak{B}}(b) = (b_q(e_i, e_j))$ associata a b ovvero a q rispetto a $\mathfrak{B}$; denotata con A tale matrice si ha:

$$q(v) = {}^t\!xAx, \quad b_q(v, w) = {}^t\!xAy$$

dove $v, w \in V$ sono vettori di V di componenti $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ rispetto a $\mathfrak{B}$.

Se $L : V \to V$ è un automorfismo e $q \in Q(V)$, allora anche $q \circ L : V \to \mathbb{K}$ è una forma quadratica, la cui forma bilineare associata è definita da:

$$b_{q\circ L}(v, w) := b_q(Lv, Lw).$$

Proposizione 1.1 *Se $\{e_i\}$ è una base di V, allora*

$$M_{\mathfrak{B}}(q) = M_{\mathfrak{B}'}(q \circ L), \text{ dove } \mathfrak{B}' \text{ è la base } \mathfrak{B}' := \{L^{-1}e_i\}. \tag{1}$$

Dimostrazione: Infatti:

$$b_{q\circ L}(L^{-1}e_i, L^{-1}e_j) = b_q(LL^{-1}e_i, LL^{-1}e_j) = b_q(e_i, e_j).$$

$\square$

Definizione 1.2 Due forme quadratiche $q, q' \in Q(V)$ si diranno *equivalenti* se

$$q' = q \circ L$$

dove $L : V \to V$ è un automorfismo.

Proposizione 1.3 *Se q e q' sono equivalenti, allora q e q' hanno lo stesso rango e, nel caso reale, anche la stessa segnatura.*

DIMOSTRAZIONE: È conseguenza immediata della (1). □

Teorema 1.4 *Siano q, q' due forme quadratiche su V.*
1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, allora:

$$q \text{ e } q' \text{ sono equivalenti} \iff q \text{ e } q' \text{ hanno lo stesso rango.}$$

2) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, allora:

$$q \text{ e } q' \text{ sono equivalenti} \iff q \text{ e } q' \text{ hanno la stessa segnatura.}$$

DIMOSTRAZIONE: Le condizioni enunciate sono necessarie affinchè q e q' siano equivalenti in base alla Proposizione precedente. Sono sufficienti perchè, per il Teorema di diagonalizzazione nel caso complesso ed il Teorema di Sylvester nel caso reale, q e q' ammettono due basi diagonalizzanti $\mathfrak{B} = \{e_i\}$ e $\mathfrak{B}' = \{e'_i\}$ rispetto alle quali

$$M_{\mathfrak{B}}(q) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) = M_{\mathfrak{B}'}(q')$$

nel caso 1), ovvero

$$M_{\mathfrak{B}}(q) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0) = M_{\mathfrak{B}'}(q')$$

nel caso 2), dove nel primo caso il numero degli scalari sulla diagonale uguali a 1 è pari al rango comune delle due forme quadratiche, mentre nel secondo caso il numero degli scalari sulla diagonale uguali a 1 (risp. -1) è pari all'indice di positività (risp. l'indice di negatività) di q ovvero di q'. Sia ora $L : V \to V$ l'automorfismo tale che

$$L(e'_i) = e_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Applicando la (1) si ottiene quindi

$$M_{\mathfrak{B}}(q) = M_{\mathfrak{B}'}(q \circ L)$$

da cui

$$M_{\mathfrak{B}'}(q') = M_{\mathfrak{B}'}(q \circ L)$$

il che permette di concludere che $q' = q \circ L$ in quanto tali forme sono associate alla stessa matrice nella base $\mathfrak{B}'$. $\square$

Si osservi che, più in generale, se $F : V \to V'$ è un isomorfismo tra due spazi vettoriali sullo stesso campo, per ogni forma quadratica $q' : V' \to \mathbb{K}$, si ha che $q' \circ F$ è una forma quadratica su V, avente lo stesso rango di q' e, nel caso reale, la stessa segnatura.

Concludiamo questo paragrafo ricordando che il radicale (o nucleo) di una forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{K}$ è il sottospazio

$$Rad(b) = V^{\perp} = \{v \in V | \forall w \in V : \ b(v, w) = 0\}.$$

La forma b si dice *non degenere* se $Rad(b) = \{0\}$. È noto che

$$\dim(Rad(b)) = \dim(V) - r(b),$$

dove $r(b)$ denota il rango di b. Nel seguito, considerata una forma quadratica q, chiameremo radicale di q il radicale della forma bilineare simmetrica associata b_q. Tale sottospazio verrà denotato con il simbolo $Rad(q)$. Allo stesso modo, si pone $r(q) := r(b_q)$ e q si dirà non degenere se tale è b_q. Per ogni sottospazio U, verrà sempre utilizzato il simbolo $U^{\perp}$ per denotare il sottospazio ortogonale ad U rispetto a b_q.

Denoteremo inoltre con $C(q)$ il *cono isotropo* di q, che è l'insieme dei vettori *isotropi*, cioè tali che $q(v) = 0$.

Proposizione 1.5 *Sia $q : V \to \mathbb{K}$ una forma quadratica non degenere e sia U un sottospazio di V. Risulta:*

1) $\dim(U^{\perp}) = \dim(V) - \dim(U)$.
2) $Rad(q|_U) = U \cap U^{\perp}$.
3) $V = U \oplus U^{\perp}$ *se e solo se la restrizione di q ad U è non degenere.*

DIMOSTRAZIONE: 1) Osserviamo che È ben noto che, poichè la forma bilineare $b = b_q$ è non degenere, l'applicazione $\Phi : V \to V'$, dove V' denota il duale di V, che associa ad ogni $v \in V$ il funzionale lineare $b_v : V \to \mathbb{K}$ tale che

$$b_v(w) = b(v, w) \tag{2}$$

è un isomorfismo. Notiamo allora che

$$U^{\perp} = \{v \in V : \Phi(u) \in U^0\}$$

dove $U^0 \subset V'$ denota l'annullatore del sottospazio U. Abbiamo pertanto

$$U^{\perp} = \Phi^{-1}(U^0)$$

da cui, essendo Φ un isomorfismo, segue che $\dim(U^{\perp}) = \dim(U^0) = \dim(V) - \dim(U)$.

$\square$

Proposizione 1.6 *Sia $q : V \to \mathbb{K}$ una forma quadratica non nulla su V e sia U un sottospazio tale che:*

$$V = U \oplus Rad(q).$$

Allora la restrizione di q a U è non degenere e, nel caso reale, ha la stessa segnatura di q.

Dimostrazione: Posto $r = \dim(U)$, è sufficiente analizzare la matrice diagonale associata a b_q rispetto ad una base di V del tipo $\{v_1, \dots v_n\}$ i cui primi r vettori sono in U e costituiscono una base diagonalizzante per la restrizione di b_q a U, mentre gli ultimi $n - r$ sono in $Rad(q)$. $\square$

2 La nozione di iperquadrica proiettiva

Definizione 2.1 Sia $(S, \mathcal{K})$ uno spazio geometrico proiettivo di dimensione $n \geq 1$ sul campo $\mathbb{K}$. Si fissi un sistema coordinato $k \in \mathcal{K}$.

Assegnata una forma quadratica non nulla $q : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$, si denoterà con $\mathcal{Q}_{k,q}$ il *luogo geometrico* di S, costituito dall'insieme di tutti e soli i punti $P \in S$ il cui vettore di coordinate proiettive x rispetto a k soddisfa la condizione

$$q(x) = 0.$$

Si tratta quindi dell'insieme

$$\mathcal{Q}_{k,q} := k^{-1}(\{[v] \in \mathbb{K}P_n | \, q(v) = 0\}).$$

Esso è ben definito perchè

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x),$$

per cui la circostanza che sia verificata la condizione $q(x) = 0$ non dipende dalla particolare scelta delle coordinate di P (rispetto a k), ma solo da P. L'insieme $\mathcal{Q}_{k,q}$ si chiama usualmente *iperquadrica di equazione $q(x) = 0$ rispetto a k*. Si scriverà anche

$$\mathcal{Q}_{k,q} : q(x) = 0 \qquad \text{nel sistema coordinato } k.$$

Vediamo ora come cambiano le equazioni in questione per un cambiamento del sistema coordinato:

Proposizione 2.2 *Si consideri il luogo $\mathcal{Q} : q(x) = 0$ rispetto a k. Allora, se $k' = \omega_L \circ k$ è un altro sistema coordinato, si ha che lo stesso luogo ha equazione rispetto a k':*

$$\mathcal{Q} : (q \circ L^{-1})(x) = 0.$$

In altri termini:

$$\mathcal{Q}_{k,q} = \mathcal{Q}_{k',q\circ L^{-1}}. \tag{3}$$

La dimostrazione è semplice e si lascia al lettore. Si osservi che una iperquadrica, così definita, generalmente *non* determina univocamente la sua equazione, ovvero la forma quadratica che la definisce. Intanto, per ogni $\lambda \neq 0$, le forme q e λq desterminano lo stesso luogo geometrico. Ma si possono presentare situazioni più problematiche. Ad esempio, le iperquadriche (dette nel seguito coniche) di $\mathbb{R}P_2$

$$\mathcal{Q}_1 : x_1^2 + x_2^2 = 0, \;\; \mathcal{Q}_2 : x_1^2 + 2x_2 = 0$$

coincidono come insiemi, in quanto contenenti entrambi solo il punto $[0, 0, 1]$. D'altra parte, le forme quadratiche $q(x) = x_1^2 + x_2^2$ e $q'(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ non sono proporzionali.

L'esistenza di tali situazioni è un ostacolo alla possibilità di riguardare tutte le iperquadriche come punti di un altro spazio proiettivo (in analogia con quanto si è visto a proposito degli iperpiani, che costituiscono lo spazio duale di S), nonchè alla possibilità di definire in modo non ambiguo degli invarianti, come il rango (bisognerebbe provare a priori che se $\mathcal{Q} : q(x) = 0$ e $\mathcal{Q} : q'(x) = 0$ nello stesso sistema coordinato, allora le forme quadratiche q e q' hanno lo stesso rango).

Per ovviare a questo problema, assumeremo il punto di vista che, in situazioni come quella appena descritta, quando q e q' non sono proporzionali, le due iperquadriche $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ *non* sono lo stesso oggetto.

Ciò significa che, piuttosto che considerare un'iperquadrica come un sottoinsiseme di S, occorre identificarla con la forma quadratica q che la definisce in un dato sistema coordinato k, la quale viene considerata univocamente determinata a meno di un fattore di proporzionalità. Tenendo conto della (3), che tiene conto di come muta q al variare di k, si dà quindi la seguente definizione.

Definizione 2.3 Sia $(S, \mathcal{K})$ uno spazio geometrico proiettivo n-dimensionale sul campo $\mathbb{K}$. Si chiama *iperquadrica* di S ogni classe di equivalenza

$$\mathcal{Q} = [k, q]$$

di coppie $(k, q) \in \mathcal{K} \times Q(\mathbb{K}^{n+1})^*$ rispetto alla relazione:

$(k, q) \sim (k', q')$ *se e solo se esistono* $L \in Aut(\mathbb{K}^{n+1})$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *tali che*:

$$k' = \omega_L \circ k, \qquad q' = \lambda(q \circ L^{-1}). \tag{4}$$

Definizione 2.4 Se $\mathcal{Q} = [k, q]$ è un'iperquadrica, si scriverà anche

$$\mathcal{Q} : q(x) = 0 \text{ rispetto a } k$$

e si dirà che $\mathcal{Q}$ *ha equazione*

$$q(x) = 0$$

nel sistema coordinato k.

Definizione 2.5 Considerata un'iperquadrica $\mathcal{Q}$ di equazione

$$\mathcal{Q} : q(x) = 0$$

rispetto a un sistema coordinato k, se

$$q(x) = {}^{t}xAx,$$

ovvero $A \in M_n(\mathbb{K})$ è la matrice associata a q rispetto alla base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$, $n = \dim(S)$, allora diremo che A è una matrice di $\mathcal{Q}$ rispetto a k.

Definizione 2.6 Si chiama *supporto* di un'iperquadrica $\mathcal{Q} = [k, q]$ il luogo geometrico $\mathcal{Q}_{k,q} \subset S$. Tale insieme si denoterà con $\mathrm{Supp}(\mathcal{Q})$.

La definizione è ben posta, in quanto se $\mathcal{Q} = [k, q] = [k', q']$ allora tra le coppie (k, q) e (k', q') sussiste la (4) e da ciò segue in forza della (3) che

$$\mathcal{Q}_{k',q'} = \mathcal{Q}_{\omega_L \circ k, \lambda q \circ L^{-1}} = \mathcal{Q}_{k,\lambda q} = \mathcal{Q}_{k,q}.$$

Nella pratica spesso ci si riferisce ad un'iperquadrica come ad un luogo geometrico, identificandola cioè col suo supporto, ma occorre sempre ricordare che l'oggetto in questione è in realtà l'insieme delle delle sue equazioni ammissibili nei vari sistemi coordinati. Ad esempio, data un'iperquadrica $\mathcal{Q}$ scriveremo sempre $P \in \mathcal{Q}$ in luogo di $P \in \mathrm{Supp}(\mathcal{Q})$ per esprimere la circostanza che P è un punto appartenente al supporto di $\mathcal{Q}$ e diremo semplicemente che P è un punto di $\mathcal{Q}$ ovvero che $\mathcal{Q}$ passa per il punto P.

Definizione 2.7 Un'iperquadrica di un piano geometrico proiettivo è detta *conica*, mentre un'iperquadrica di uno spazio geometrico proiettivo tridimensionale è detta *quadrica*.

Molto spesso in letteratura si usa indistintamente il termine *quadrica* in luogo di iperquadrica, se la dimensione dello spazio è almeno 3.

Inoltre, in tutto il seguito col termine iperquadrica *reale* intenderemo un'iperquadrica di uno spazio geometrico proiettivo reale, mentre col termine iperquadrica *complessa* intenderemo un'iperquadrica di uno spazio geometrico proiettivo complesso. Inoltre col termine *quadrica proiettiva* si intende un'iperquadrica di qualche spazio geometrico proiettivo.

Proposizione 2.8 *Siano $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica di S e k_o un fissato sistema coordinato. Allora esiste $q_o \in Q(\mathbb{K}^{n+1})^*$ tale che*

$$\mathcal{Q} = [k_o, q_o].$$

Se q' è un'altra forma quadratica tale che $\mathcal{Q} = [k_o, q']$, allora $q' = \lambda q_o$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Dimostrazione: Supposto infatti $\mathcal{Q} = [k, q]$, allora, essendo k e k_o compatibili, abbiamo che $k_o = \omega_L \circ k$ per una certa proiettività ω_L di $\mathbb{K}P_n$, da cui

$$\mathcal{Q} = [k, q] = [k_o, q \circ L^{-1}],$$

per cui la forma quadratica $q_o = q \circ L^{-1}$ soddisfa la condizione richiesta. Se ora q' soddisfa la stessa condizione, abbiamo:

$$[k_o, q_o] = [k_o, q']$$

il che comporta

$$k_o = \omega_F \circ k_o, \ q' = \lambda q_o \circ F^{-1},$$

per un certo automorfismo F di $\mathbb{K}^{n+1}$ ed uno scalare λ; ma necessariamente dev'essere $F = \rho Id_{\mathbb{K}^{n+1}}$ con $\rho \in \mathbb{K}^*$ e quindi $q' = \lambda \rho^{-2} q_o$. □

In modo più esplicito, resta stabilito che, fissato un sistema coordinato k, per ogni iperquadrica $\mathcal{Q}$, se essa ammette, rispetto a k, le equazioni

$$\mathcal{Q} : q(x) = 0, \quad \mathcal{Q} : q'(x) = 0,$$

allora esiste $\lambda \neq 0$ tale che $q' = \lambda q$.

L'insieme di tutte le iperquadriche di uno spazio geometrico proiettivo S verrà denotato con $Q(S)$. Mostriamo che esso ha una struttura canonica di spazio geometrico proiettivo. L'approccio è analogo a quello utilizzato nel caso di altri modelli di spazi proiettivi.

Sia k un sistema coordinato; consideriamo l'applicazione

$$\omega_k : Q(S) \to \mathbb{P}(Q(\mathbb{K}^{n+1}))$$

tale che

$$\omega_k(\mathcal{Q}) := [q] \tag{5}$$

dove q è una forma quadratica tale che $\mathcal{Q} = [k, q]$. Tale definizione ha senso ed è ben posta in virtù della Proposizione precedente. È facile verificare che ω_k è una bigezione: la sua inversa è data da

$$[q] \mapsto [k, q].$$

Teorema 2.9 *Dato uno spazio geometrico proiettivo n-dimensionale S sul campo $\mathbb{K}$, l'insieme $Q(S)$ delle iperquadriche di S ammette un'unica struttura di spazio geometrico proiettivo rispetto alla quale tutte le bigezioni*

$$\omega_k : Q(S) \to \mathbb{P}(Q(\mathbb{K}^{n+1})),$$

al variare del sistema coordinato k su S, sono trasformazioni proiettive.

Rispetto a tale struttura, si ha $\dim(Q(S)) = \frac{n(n+3)}{2}$.

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di verificare che, se k e k' sono due sistemi coordinati, allora $\omega_{k'} \circ \omega_k^{-1}$ è una proiettività di $\mathbb{P}(Q(\mathbb{K}^{n+1}))$. Infatti, supposto $k' = \omega_L \circ k$, abbiamo, per ogni $[q] \in \mathbb{P}(Q(\mathbb{K}^{n+1}))$:

$$(\omega_{k'} \circ \omega_k^{-1})([q]) = \omega_{k'}([k, q]) = \omega_{k'}([k', q \circ L^{-1}]) = [q \circ L^{-1}].$$

Dunque $\omega_{k'} \circ \omega_k^{-1}$ è la proiettività ω_F associata all'automorfismo $F : Q(\mathbb{K}^{n+1}) \to Q(\mathbb{K}^{n+1})$ definito da:

$$F(q) := q \circ L^{-1}.$$

□

3 Invarianti proiettivi delle iperquadriche reali e complesse

Consideriamo sempre uno spazio proiettivo S di dimensione $n \geq 1$.

Definizione 3.1 Si chiama *rango* di una iperquadrica $\mathcal{Q} = [k, q]$ il rango della forma quadratica q. Esso si denoterà con $r(\mathcal{Q})$.

La definizione è ben posta sempre in virtù della (4) e del fatto che forme quadratiche equivalenti o proporzionali hanno lo stesso rango.

Definizione 3.2 Un'iperquadrica $\mathcal{Q}$ si dice *non degenere* se $r(\mathcal{Q}) = n + 1$.

Si noti che dire che $\mathcal{Q} = [k, q]$ è non degenere equivale a richiedere che la forma quadrica q sia non degenere, nel senso che $Rad(q) = \{0\}$.

Nel caso reale, il rango non è un invariante sufficiente a classificare le iperquadriche. Entra in gioco la segnatura delle forme quadratiche coinvolte. Non è possibile però definire la segnatura di un'iperquadrica in quanto se all'equazione $q(x) = 0$ si sostituisce l'opposta $-q(x) = 0$, la segnatura in generale cambia; più precisamente, le segnature di una forma quadratica reale q e di λq sono legate come segue: se $\lambda > 0$ allora sono uguali; se $\lambda < 0$, vengono scambiati gli indici di positività e l'indice di negatività. Ha senso però dare la seguente:

Definizione 3.3 Sia V uno spazio vittoriale reale e sia $q \in Q(V)$. Si chiama *indice* di q il più piccolo tra gli indici di positività e l'indice di negatività.

Osservazione 3.4 Si osservi che l'indice i di una forma quadratica reale di rango r soddisfa

$$i \leq \frac{r}{2},$$

Infatti, la segnatura corrispondente è $(r - i, i)$ oppure $(i, r - i)$ e si ha $r - i \geq i$.

Avendosi $i(q) = i(\lambda q)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^*$, questa nozione è riferibile alle iperquadriche:

Definizione 3.5 Sia S uno spazio geometrico proiettivo reale. Si chiama *indice* di un'iperquadrica $\mathcal{Q} = [k, q]$ di S l'indice $i(q)$. Esso si denota con $i(\mathcal{Q})$.

La definizione è ben posta ancora stante la (4), in quanto forme quadratiche reali equivalenti hanno lo stessa segnatura, mentre forme quadratiche reali proporzionali hanno lo stesso indice.

4 La classificazione proiettiva delle iperquadriche

Siano $(S, \mathcal{K})$ e $(S', \mathcal{K}')$ due spazi geometrici proiettivi sul campo $\mathbb{K}$, della stessa dimensione $n \geq 1$. In questa sezione ci occupiamo del problema di classificare le iperquadriche proiettive rispetto alla nozione di equivalenza che si introduce con l'idea di "sovrapporre" una iperquadrica su un'altra mediante un "movimento" dato da una trasformazione proiettiva. Poichè i nostri oggetti non sono sottoinsiemi degli spazi coinvolti, occorre dare un'opportuna definizione di cosa si intenda per immagine di una iperquadrica mediante una tale trasformazione.

Definizione 4.1 Sia $\omega : S \to S'$ una trasformazione proiettiva. Sia $\mathcal{Q} = [k, q]$ un'iperquadrica. Si definisce *immagine* di $\mathcal{Q}$ mediante ω l'iperquadrica di S', denotata con $\omega(\mathcal{Q})$, data da:

$$\omega(\mathcal{Q}) := [k \circ \omega^{-1}, q]. \tag{6}$$

Tale definizione ha senso in quanto $k \circ \omega^{-1}$ è un sistema coordinato ammissibile su S' (è infatti un isomorfismo proiettivo tra S' e $\mathbb{K}P_n$). Inoltre è ben posta; infatti se $\mathcal{Q} = [k, q] = [k', q']$ allora tenendo conto della relazione (4) tra le coppie (k, q) e (k', q') abbiamo:

$$[k' \circ \omega^{-1}, q'] = [\omega_L \circ (k \circ \omega^{-1}), \lambda(q \circ L^{-1})] = [k \circ \omega^{-1}, q].$$

Verifichiamo ora che tale nozione, al livello del luogo geometrico soggiacente all'iperquadrica, coincide con l'usuale immagine dello stesso insieme mediante ω:

Proposizione 4.2 *Sia $\omega : S \to S'$ una trasformazione proiettiva tra spazi geometrici proiettivi della stessa dimensione. Per ogni iperquadrica $\mathcal{Q}$, si ha che*

$$\omega(\mathrm{Supp}(\mathcal{Q})) = \mathrm{Supp}(\omega(\mathcal{Q})).$$

DIMOSTRAZIONE: Infatti, se $\mathcal{Q} = [k, q]$, allora per definizione il supporto di $\mathcal{Q}$ è il luogo di equazione $\mathcal{Q} : q(x) = 0$ rispetto a k. D'altra parte $\omega(\mathcal{Q}) = [k', q]$ con $k' = k \circ \omega^{-1}$, sicchè il supporto di tale iperquadrica ha la stessa equazione rispetto a k'. Ma per ogni $P \in S$ si ha che P e $\omega(P)$ hanno lo stesso vettore di coordinate omogenee x rispetto ai due sistemi coordinati k e k'. Dunque $P \in \mathrm{Supp}(\mathcal{Q})$ se e solo se $\omega(P) \in \mathrm{Supp}(\omega(\mathcal{Q}))$. $\square$

È conseguenza immediata della definizione 4.1 che $\omega(\mathcal{Q})$ ha sempre lo stesso rango e, nel caso reale, lo stesso indice di $\mathcal{Q}$.

DIMOSTRAZIONE: Infatti, tenendo conto della definizione (6), abbiamo:

$$\omega(\mathcal{Q}) = [k \circ \omega^{-1}, q] = [\omega_L^{-1} \circ k', q] = [k', q \circ L^{-1}].$$

$\square$

Definizione 4.3 Siano S e S' spazi geometrici proiettivi della stessa dimensione, sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Due iperquadriche $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ rispettivamente di S e di S' si dicono *proiettivamente equivalenti* se esiste una trasformazione proiettiva $\omega : S \to S'$ tale che

$$\omega(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'.$$

Si noti che, se $\omega : S \to S'$ è una trasformazione proiettiva e $\omega(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$, allora si ha anche $\omega^{-1}(\mathcal{Q}') = \mathcal{Q}$. Ciò è una semplice conseguenza della Definizione 4.1. In particolare, l'equivalenza proiettiva è una relazione di equivalenza sullo spazio $Q(S)$ di tutte le iperquadriche di un fissato spazio proiettivo.

Il seguente semplice risultato dà un'altra interpretazione della circostanza che due iperquadriche siano proiettivamente equivalenti: ciò accade se e solo se esse ammettono la stessa equazione in opportuni sistemi coordinati; anzi, fissata un'equazione di una di esse, è possibile scegliere un sistema coordinato rispetto al quale l'altra abbia la stessa equazione:

Proposizione 4.4 *Siano S e S' spazi geometrici proiettivi della stessa dimensione, sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Siano $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ iperquadriche di S e di S' rispettivamente, e supponiamo che $\mathcal{Q}'$ abbia equazione*

$$\mathcal{Q}' : q_o(x) = 0$$

rispetto a un fissato sistema coordinato su S'.

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

a) $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono proiettivamente equivalenti;

b) esiste un sistema coordinato su S rispetto al quale $\mathcal{Q} : q_o(x) = 0$.

Dimostrazione:

a) $\Rightarrow$ b) Consideriamo una trasformazione proiettiva ω tale che $\omega{-}1(\mathcal{Q}') = \mathcal{Q}$. Per ipotesi, $\mathcal{Q}' = [k'_o, q_o]$ per un opportuno sistema coordinato k'_o su S'. Allora applicando la Def. 4.1 abbiamo $\mathcal{Q} = [k'_o \circ^{-1}, \omega, q_o]$ e quindi basta considerare il sistema coordinato $k = k'_o \circ \omega^{-1}$.

b) $\Rightarrow$ a) Considerato un sistema coordinato k tale che $\mathcal{Q} = [k, q_o]$, posto $\omega := (k'_o)^{-1} \circ k$, abbiamo che ω è una trasformazione proiettiva e risulta

$$\omega(\mathcal{Q}) = [k \circ \omega^{-1}, q_o] = [k'_o, q_o] = \mathcal{Q}'.$$

$\square$

Proviamo ora un risultato fondamentale che fornisce un criterio molto semplice per stabilire se due iperquadriche reali o complesse sono proiettivamente equivalenti:

Teorema 4.5 *(Criterio di equivalenza proiettiva per iperquadriche reali e complesse)*

Siano S e S' due spazi geometrici proiettivi della stessa dimensione sullo stesso campo $\mathbb{K}$.

Si considerino due iperquadriche $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ rispettivamente di S e di S'.

1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono protettivamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso rango.

2) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso rango e lo stesso indice.

Dimostrazione: Le condizioni enunciate sono nessarie affinchè le iperquadriche siano equivalenti, in virtù di quanto già osservato in precedenza sull'invarianza di rango e indice rispetto all'operazione di costruire l'immagine di un'iperquarica mediante una trasformazione proiettiva. Viceversa, si assuma che $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ abbiano lo stesso rango e, nel caso reale, anche lo stesso indice. Posto $\mathcal{Q} = [k, q]$ e $\mathcal{Q}' = [k', q']$, abbiamo dunque che le forme quadratiche q e q' hanno lo stesso rango e, nel caso reale lo stesso indice. In quest'ultimo caso, a meno di sostituire q' con $-q'$, possiamo supporre che esse abbiano anche la stessa segnatura. Dunque q e $\epsilon q'$, dove $\epsilon = \pm 1$, sono forme quadratiche equivalenti su $\mathbb{K}^{n+1}$ (Teorema 1.4). Denotato con L un automorfismo di $\mathbb{K}^{n+1}$ tale che $q = \epsilon q' \circ L$, e considerando la trasformazione proiettiva $\omega = k'^{-1} \circ \omega_L \circ k$, perveniamo subito alla conclusione che $\omega(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$ avendosi:

$$\omega(\mathcal{Q}) = \omega([k, q]) = [k \circ \omega^{-1}, q] = [\omega_{L^{-1}} \circ k', q] = [\omega_{L^{-1}} \circ k', \epsilon q' \circ L] = [k', q'] = \mathcal{Q}'.$$

□

Il criterio appena stabilito permette di ottenere una classificazione completa delle iperquadriche di un assegnato spazio proiettivo a meno di equivalenza proiettiva, esibendo esplicitamente un rappresentante per ogni classe di equivalenza.

Definizione 4.6 Assegnato un sistema coordinato k di uno spazio proiettivo complesso n-dimensionale S, per ogni intero r tale che $1 \leq r \leq n+1$, denoteremo con $\mathcal{Q}_r^k$ l'iperquadrica di equazione

$$\mathcal{Q}_r : x_1^2 + \cdots + x_r^2 = 0$$

rispetto a k.

Si noti che $\mathcal{Q}_r^k$ ha rango r. Applicando direttamente il criterio fornito dal Teorema precedente ricaviamo quindi:

Corollario 4.7 *(Teorema di classificazione delle iperquadriche complesse)*
Sia S uno spazio geometrico proiettivo complesso di dimensione n. Si fissi un sistema coordinato k. Ogni iperquadrica $\mathcal{Q}$ di S è proiettivamente equivalente ad una ed una sola delle iperquadriche $\mathcal{Q}^k_r$, $1 \leq r \leq n+1$ precisamente quella corrispondente a $r = r(\mathcal{Q})$.

Lo stesso risultato si può riformulare come segue:

Corollario 4.8 *(Equazioni canoniche delle iperquadriche complesse)*
Sia S uno spazio geometrico proiettivo complesso di dimensione n. Assegnata un'iperquadrica $\mathcal{Q}$ di S, esiste un sistema coordinato k tale che

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^k_r$$

dove $r = r(\mathcal{Q})$, ovvero tale che

$$\mathcal{Q} : x_1^2 + \cdots + x_r^2 = 0.$$

In tal caso diremo che l'equazione di $\mathcal{Q}$ è in forma canonica *rispetto a tale sistema coordinato.*

Passiamo a considerare gli analoghi risultati relativi al caso reale.

Definizione 4.9 Assegnato un sistema coordinato k di uno spazio proiettivo reale n-dimensionale S, per ogni coppia di interi (p, q) tali che $n + 1 \geq p \geq q \geq 0$ e $1 \leq p + q \leq n + 1$, denoteremo con $\mathcal{Q}^k_{p,q}$ l'iperquadrica di equazione

$$\mathcal{Q}^k_{p,q} : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 0$$

rispetto a k.

Risulta $r(\mathcal{Q}^k_{p,q}) = p + q$, $i(\mathcal{Q}^k_{p,q}) = q$.

Corollario 4.10 *(Teorema di classificazione delle iperquadriche reali)*
Sia S uno spazio geometrico proiettivo reale di dimensione n. Si fissi un sistema coordinato k. Ogni iperquadrica $\mathcal{Q}$ di S è proiettivamente equivalente ad una ed una sola delle iperquadriche $\mathcal{Q}^k_{p,q}$, determinata da $q = i(\mathcal{Q})$ e $p + q = r(\mathcal{Q})$.

Corollario 4.11 *(Equazioni canoniche delle iperquadriche reali)*
Sia S uno spazio geometrico proiettivo complesso di dimensione n. Assegnata un'iperquadrica $\mathcal{Q}$ di S, esiste un sistema coordinato k tale che

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^k_{p,q}$$

ovvero tale che

$$\mathcal{Q}^k_{p,q} : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 0,$$

dove $q = i(\mathcal{Q})$ e $p + q = r(\mathcal{Q})$.

In tal caso diremo che l'equazione di $\mathcal{Q}$ è in forma canonica *rispetto a tale sistema coordinato.*

Osservazione 4.12 Come conseguenza della classificazione, analizzando direttamente le equazioni canoniche, possiamo notare che un'iperquadrica reale ha supporto vuoto (diremo semplicemente che *è vuota*) se e solo se è proiettivamente equivalente a un'iperquadrica $\mathcal{Q}^k_{n+1,0}$, cioè se e solo se è non degenere e ha indice 0.

Un'iperquadrica complessa invece è sempre non vuota.

5 La classificazione delle iperquadriche di una retta e di un piano

Applicando il teorema di classificazione nel caso di una retta geometrica proiettiva, si ottiene il seguente:

Corollario 5.1 *a) Sia $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica di una retta geometrica proiettiva complessa. Allora, come luogo di punti, essa è un insieme costituito da un solo punto oppure di due punti distinti.*

b) Sia $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica di una retta geometrica proiettiva reale. Allora, come luogo di punti, essa è vuota, oppure consiste di un solo punto oppure di due punti distinti.

Dimostrazione: a) Fissato un sistema coordinato, abbiamo infatti che $\mathcal{Q}$ è proiettivamente equivalente a $\mathcal{Q}_2 : x_1^2 + x_2^2 = 0$, il cui supporto è costituito soltanto dai punti di coordinate $P_1(i, 1)$ e $P_2(-i, 1)$ rispetto a k oppure a $\mathcal{Q}_1 : x_1^2 = 0$ il cui supporto contiene il solo punto $P(0, 1)$.

b) Le tre eventualità corrispondono rispettivamente al caso in cui $\mathcal{Q}$ è equivalente a $\mathcal{Q}_{2,0} : x_1^2 + x_2^2 = 0$, ovvero $\mathcal{Q}_{1,1} : x_1^2 - x_2^2 = 0$ o a $\mathcal{Q}_{1,0} : x_1^2 = 0$. $\square$

Nel caso delle coniche, il teorema di classificazione si specializza come segue.

Corollario 5.2 *Sia S un piano geometrico proiettvo complesso. Si fissi un sistema coordinato k. Ogni conica $\mathcal{C}$ è proiettivamente equivalente ad una ed una sola delle seguenti, di cui viene data l'equazione in k:*

$\mathcal{C}_3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ *(conica non degenere)*
$\mathcal{C}_2 : x_1^2 + x_2^2 = 0$ *(unione di due rette distinte)*
$\mathcal{C}_1 : x_1^2 = 0$ *(retta doppia).*

Corollario 5.3 *Sia S un piano geometrico proiettvo reale. Si fissi un sistema coordinato k. Ogni conica $\mathcal{C}$ è proiettivamente equivalente ad una ed una sola delle seguenti, di cui si dà l'equazione rispetto a k:*

$\mathcal{C}_{(3,0)} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ *(conica vuota)*
$\mathcal{C}_{(2,1)} : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ *(conica non degenere non vuota)*
$\mathcal{C}_{(2,0)} : x_1^2 + x_2^2 = 0$ *(conica ridotta ad un punto)*
$\mathcal{C}_{(1,1)} : x_1^2 - x_2^2 = 0$ *(unione di rette distinte)*
$\mathcal{C}_{(1,0)} : x_1^2 = 0$ *(retta doppia).*

6 Iperquadriche e sottospazi

In questo paragrafo denotiamo con S uno spazio geometrico proiettivo reale o complesso.

Definizione 6.1 Dati un'iperquadrica $\mathcal{Q}$ ed un sottospazio α di S, si dirà che α è *contenuto* in $\mathcal{Q}$ se

$$\alpha \subset \mathrm{Supp}(\mathcal{Q}).$$

In tal caso scriveremo

$$\alpha \subset \mathcal{Q}.$$

Si noti che, dal punto di vista analitico, se

$$\mathcal{Q} : q(x) = 0$$

rispetto ad un certo sistema coordinato k, e supposto $k(\alpha) = \mathbb{P}(U)$, allora la condizione $\alpha \subset \mathcal{Q}$ è vera se e solo se la *restrizione $q|_U$ è identicamente nulla.*

Nel caso generale, la forma quadratica $q|_U$ permette di determinare un'equazione del luogo dei punti di intersezione tra l'iperquadrica ed il sottospazio, in un sistema di coordinate omogenee intrinseche di α, che lo rappresenta come un'iperquadrica di quest'ultimo. Ciò è alla base della seguente definizione:

Definizione 6.2 Siano $\mathcal{Q} = [k, q]$ un'iperquadrica e α un sottospazio di S, non contenuto in $\mathcal{Q}$, di dimensione $s \geq 1$. L'*iperquadrica intersezione tra* $\mathcal{Q}$ *e* α è l'iperquadrica di α, denotata con $\mathcal{Q} \cap \alpha$, definita da:

$$\mathcal{Q} \cap \alpha := [\bar{k},\, q_{|U} \circ F^{-1}] \tag{7}$$

dove $U \subset \mathbb{K}^{n+1}$ è il sottospazio tale che $k(\alpha) = \mathbb{P}(U)$, $F : U \to \mathbb{K}^{s+1}$ è un isomorfismo lineare fissato, e $\bar{k}$ è il sistema coordinato su α dato dalla composizione

$$\bar{k} = \omega_F \circ (k_{|\alpha})_{\#}.$$

Non è complicato verificare che la definizione non dipende dalla scelta di k e di q per individuare l'iperquadrica, nè dalla scelta dell'isomorfismo F. A tal fine, supponiamo che si abbia anche $\mathcal{Q} = [k', q']$ e, assunto $k'(\alpha) = \mathbb{P}(U')$, si fissi un isomorfismo $G : U' \to \mathbb{K}^{s+1}$. Si tratta di controllare che

$$[\bar{k},\, q_{|U} \circ F^{-1}] = [\bar{k}',\, q'_{|U'} \circ G^{-1}] \tag{8}$$

dove $\bar{k}' = \omega_G \circ (k'_{|\alpha})_{\#}$. Tra i sistemi coordinati k e k' e le forme quadratiche q e q' sussistono intanto le relazioni (4); in particolare si ottiene immediatamente che $U' = L(U)$; denotiamo con $\bar{L} : U \to U'$ la ridotta della restrizione dell'isomorfismo L al sottospazio U. La relazione $q' = \lambda(q \circ L^{-1})$ implica allora direttamente:

$$q'|_{U'} = \lambda(q|_U \circ \bar{L}^{-1}).$$

Stabiliamo ora che relazione c'è tra i sistemi coordinati $\bar{k}$ e $\bar{k}'$ indotti sul sottospazio α; risulta:

$$\bar{k}' \circ \bar{k}^{-1} = \omega_G \circ \omega_{\bar{L}} \circ \omega_F^{-1},$$

per cui possiamo scrivere:

$$\bar{k}' = \omega_T \circ \bar{k} \tag{$*$}$$

dove $T : \mathbb{K}^{s+1} \to \mathbb{K}^{s+1}$ è l'isomorfismo composto $T := G \circ \bar{L} \circ F^{-1}$. D'altra parte:

$$q'|_{U'} \circ G^{-1} = \lambda(q|_U \circ \bar{L}^{-1}) \circ G^{-1} = \lambda(q|_U \circ F^{-1}) \circ T^{-1}. \tag{$**$}$$

Le relazioni (*) e (**) garantiscono che la (8) è vera.

Il significato geometrico della definizione (7) è chiarito dal risultato seguente, in cui si mostra che l'intersezione tra un'iperquadrica, intesa come luogo geometrico, ed il sottospazio α, è il supporto di $\mathcal{Q} \cap \alpha$:

Proposizione 6.3 *Per ogni iperquadrica* $\mathcal{Q}$ *e per ogni sottospazio* α *non contenuto in* $\mathcal{Q}$*, risulta:*

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{Q} \cap \alpha) = \mathrm{Supp}(\mathcal{Q}) \cap \alpha.$$

Dimostrazione: Con le notazioni della definizione precedente, dato un punto $P \in \alpha$ con $k(P) = [x]$, abbiamo $x \in U$; posto inoltre $x' = F(x)$, risulta, che $\bar{k}(P) = [x']$. Ora, tale punto appartiene anche al supporto dell'iperquadrica se e solo se $q(x) = 0$, il che accade se e solo se $q(F^{-1}(x')) = 0$, ovvero se e solo se appartiene al supporto di $\mathcal{Q} \cap \alpha$. $\square$

Osservazione 6.4 È importante osservare che dalla (7) segue che gli invarianti fondamentali, cioè il rango ed eventualmente l'indice, di $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sono determinati semplicemente dalla restrizione $q|_U$ di q al sottospazio U.

Un caso di particolare importanza è quello in cui α è una retta di S, discusso nel risultato che segue.

Teorema 6.5 (Posizione reciproca retta-iperquadrica)
Siano $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica e r una retta di S, non contenuta in $\mathcal{Q}$. Allora l'intersezione tra il supporto di $\mathcal{Q}$ e r è un insieme costituito da al più due punti distinti. Nel caso complesso essa è sempre non vuota.

Dimostrazione: Ciò è una conseguenza immediata del Corollario 5.1, in quanto l'intersezione in questione è il supporto della iperquadrica $\mathcal{Q} \cap r$ della retta geometria proiettiva r. $\square$

Il risultato precedente è anche noto come "*principio se-tre-allora-tutti*": se una retta ha in comune tre punti distinti con un'iperquadrica, allora è necessariamente contenuta in essa.

Definizione 6.6 Si dirà che una retta r è *tangente* a un'iperquadrica $\mathcal{Q}$ se $\mathcal{Q} \cap r$ è costituita da un solo punto, detto *punto di tangenza tra* $\mathcal{Q}$ e r. Si dirà che r è *secante* se $\mathcal{Q} \cap r$ consta di due punti distinti. Infine, r si dirà *esterna* a $\mathcal{Q}$ se $\mathcal{Q} \cap r$ è vuota.

Il seguente risultato fornisce un criterio semplice per determinare la posizione reciproca tra una retta ed un'iperquadrica:

Proposizione 6.7 *Si consideri un'iperquadrica reale $\mathcal{Q}$ di equazione*

$$\mathcal{Q} : q(x) = 0$$

in un fissato sistema coordinato k. Sia $r = [P_1, P_2]$ una retta dove $k(P_i) = [u_i]$. Allora, posto $b = b_q$ e

$$A := \begin{pmatrix} q(u_1) & b(u_1, u_2) \\ b(u_1, u_2) & q(u_2) \end{pmatrix},$$

si ha:

$$r \subset \mathcal{Q} \iff A = 0$$

$$r \text{ è secante } \mathcal{Q} \iff \det(A) < 0$$

$$r \text{ è tangente a } \mathcal{Q} \iff \det(A) = 0,\ A \neq 0$$

$$r \text{ è esterna a } \mathcal{Q} \iff \det(A) > 0.$$

DIMOSTRAZIONE: La matrice A è la matrice della restrizione di q al sottospazio generato U da u_1 e u_2, rispetto alla base $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2\}$, e si ha ovviamente $r = k^{-1}(\mathbb{P}(U))$. Da qui la prima equivalenza. Assunto $A \neq 0$, la segnatura di tale matrice fornisce anche la segnatura di $q|_U$ Com'è noto, l'indice di positività (risp. indice di negatività) coincide col numero di autovalori positivi (risp. negativi) di A e da qui segue facilmente l'asserto, tenendo presente che il $\det(A)$ è il prodotto degli autovalori e facendo uso della classificazione delle iperquadriche di una retta geometrica proiettiva reale. □

Nello stesso modo, nel caso complesso si prova:

Proposizione 6.8 *Si consideri un'iperquadrica complessa $\mathcal{Q} = [k, q]$. Sia $r = [P_1, P_2]$ una retta, dove $k(P_i) = [u_i]$. Allora, posto $b = b_q$ e*

$$A := \begin{pmatrix} q(u_1) & b(u_1, u_2) \\ b(u_1, u_2) & q(u_2) \end{pmatrix},$$

si ha:

$$r \subset \mathcal{Q} \iff A = 0$$

$$r \text{ secante } \mathcal{Q} \iff det(A) \neq 0$$

$$r \text{ è tangente a } \mathcal{Q} \iff det(A) = 0, A \neq 0.$$

I risultati che seguono forniscono un metodo pratico per la classificazione di una conica reale, che evita di dover ricorrere alla diagonalizzazione della forma quadratica che la definisce.

Proposizione 6.9 *Si consideri una conica $\mathcal{C}$ di un piano geometrico proiettivo reale di equazione*
$$\mathcal{C} :\ {}^t x A x = 0$$
in un fissato sistema coordinato.

Allora $\mathcal{C}$ è vuota se e solo se la sequenza dei segni dei minori principali di A è $+++$ oppure $-+-$.

Dimostrazione: Infatti, $\mathcal{C}$ è vuota se e solo se ha rango 3 e indice 0, ovvero se e solo se A è definita positiva o definita negativa. □

Proposizione 6.10 *Si consideri una conica $\mathcal{C}$ degenere di un piano geoemetrico proiettivo reale di equazione*
$$\mathcal{C} :\ {}^t x A x = 0$$
in un fissato sistema coordinato.

Denotati con M_1, M_2 e M_3 i complementi algebrici in A degli elementi sulla diagonale principale e posto $\rho := M_1 + M_2 + M_3$, risulta:

$\rho = 0 \iff M_1 = M_2 = M_3 = 0 \iff \mathcal{C}$ *è una retta doppia.*
$\rho < 0 \iff$ *almeno un M_i è negativo* $\iff \mathcal{C}$ *è unione di rette.*
$\rho > 0 \iff$ *almeno un M_i è positivo* $\iff \mathcal{C}$ *è costituita da un solo punto.*

Dimostrazione: In forza della Prop. 6.7, lo studio dei segni dei minori M_i corrisponde allo studio della posizione reciproca tra la conica e le rette r_1, r_2 ed r_3 aventi equazioni $r_i : x_i = 0$ nel sistema coordinato assegnato. Tenendo conto del fatto che il supporto della conica è una retta o un punto, o l'unione di due rette, si controlla agevolmente che tutti gli scalari M_i sono tutti non negativi o tutti non positivi. Infatti nel primo caso, ciascuna delle rette r_i è tangente o contenuta in $\mathcal{C}$, nel secondo caso ciascuna è esterna o tangente, mentre nell'ultimo caso è sempre o secante o tangente oppure contenuta in $\mathcal{C}$. Ciò giustifica le prime tre equivalenze. Per concludere la dimostrazione si osservi che, se $\mathcal{C}$ è una retta doppia, è chiaro che tutti gli M_i sono nulli per quanto già osservato. Se $\mathcal{C}$ è unione di rette, allora almeno una delle r_i è secante perchè le tre rette in questione non formano fascio. Pertanto il corrispodente minore M_i è negativo. Per lo stesso motivo, se $\mathcal{C}$ è costituita da un solo punto, almeno una delle r_i è esterna alla conica, e quindi il corrispondente minore M_i è positivo. □

7 Significato geometrico dell'indice

Il prossimo risultato stabilisce qual è la dimensione massima di un sottospazio contenuto in un'iperquadrica reale; essa dipende solo dalla dimensione dello spazio ambiente e dagli invarianti proiettivi dell'iperquadrica:

Teorema 7.1 *Sia $\mathcal{Q}$ una iperquadrica di uno spazio geometrico proiettivo reale n-dimensionale. Allora:*

$$\max\{\dim(\alpha) |\, \alpha \textit{ sottospazio di } S \textit{ tale che } \alpha \subset \mathcal{Q}\} = i(\mathcal{Q}) + n - r(\mathcal{Q}).$$

DIMOSTRAZIONE: Posto $r := r(\mathcal{Q})$ e $i = i(\mathcal{Q})$, per il teorema di classificazione possiamo supporre $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{p,q}$ rispetto ad un fissato sistema coordinato. Ricordiamo che $p \geq q$ e $r = p + q$, $i = q$. Proviamo che esiste un sottospazio α di dimensione $i + n - r$ e che ogni sottospazio di dimensione maggiore non è contenuto in $\mathcal{Q}_{p,q}$. Riguardo la prima affermazione, è sufficiente considerare il sottospazio di equazioni

$$\alpha : \begin{cases} x_1 = x_{p+1} \\ \cdots \\ x_q = x_{p+q} \\ x_{q+1} = 0 \\ \cdots \\ x_p = 0 \end{cases}$$

Si tratta di $q + (p - q) = p$ equazioni; poichè il rango di tale sistema è massimo, abbiamo $\dim(\alpha) = n - p = n - (r - q) = i + n - r$. Infine, sia α un sottospazio di dimensione strettamente maggiore di $i + n - r$. Consideriamo il sottospazio β di equazioni:

$$\beta : \begin{cases} x_{p+1} = 0 \\ \cdots \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

che ha dimensione $p - 1$, ovvero $r - i - 1$. Evidentemente $\mathcal{Q} \cap \beta = \emptyset$. D'altra parte

$$\dim(\alpha) + \dim(\beta) > i + n - r + r - i - 1 = n - 1,$$

il che garantisce che $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Pertanto esiste un punto $P \in \alpha$ che non appartiene a $\mathcal{Q}$. $\square$

Nel caso delle iperquadriche non degeneri si ottiene quindi la seguente interpretazione geometrica dell'indice:

Corollario 7.2 *L'indice di un'iperquadrica reale non degenere è dato da:*

$$i(\mathcal{Q}) = \max\{\dim(\alpha) |\, \alpha \textit{ sottospazio di } S \textit{ tale che } \alpha \subset \mathcal{Q}\} + 1.$$

Si notino le seguenti applicazioni importanti riguardanti le coniche e le quadriche:

Corollario 7.3 *Una conica reale non degenere non contiene rette. Una quadrica reale non degenere non contiene piani.*

Dimostrazione: Nel primo caso l'indice è al massimo 1, mentre nel secondo caso esso è al massimo 2. $\square$

Corollario 7.4 *Tre punti distinti di una conica reale non degenere sono sempre non allineati.*

Dimostrazione: Ragionando per assurdo, detta r la retta congiungente tali punti, essa dovrebbe essere contenuta nella conica, il che è impossibile. $\square$

Osservazione 7.5 Come ulteriore applicazione del Teorema possiamo fornire un'altra dimostrazione del fatto che un'iperquadrica reale è vuota se e solo se è non degenere e ha indice 0.

Infatti, se un'iperquadrica $\mathcal{Q} = [k, q]$ è vuota, ovviamente dev'essere non degenere: in caso contrario, ogni punto $P = k^{-1}[u]$ con $u \in Rad(q)$ è punto di $\mathcal{Q}$ (si veda anche il paragrafo successivo). Assumendo $\mathcal{Q}$ non degenere, affermare che il supporto di $\mathcal{Q}$ è vuoto equivale ad affermare che la dimensione massima di un sottospazio contenuto in $\mathcal{Q}$ è -1 il che equivale a $i(\mathcal{Q}) = 0$.

Riguardo il caso complesso abbiamo invece:

Teorema 7.6 *Sia S uno spazio geometrico proiettivo complesso di dimensione $n \geq 1$. La dimensione massima di un sottospazio contenuto in una iperquadrica non degenere di S è $[\frac{n+1}{2}] - 1$.*

Dimostrazione: In forza della 1) della Prop. 1.5, se α è un sottospazio contenuto nell'iperquadrica $\mathcal{Q} = [k, q]$, con $k(\alpha) = \mathbb{P}(U)$, allora il sottospazio U è totalmente isotropo, nel senso che $q|_U = 0$. Ma ciò implica che $U \subset U^\perp$, e quindi $\dim(U) \leq n + 1 - \dim(U)$ e quindi $\dim(\alpha) \leq [\frac{n+1}{2}] - 1$. Per concludere la dimostrazione, è sufficiente esibire un sottospazio di dimensione $m := [\frac{n+1}{2}] - 1$ contenuto nell'iperquadrica. Si scelga un sistema coordinato rispetto al quale

$$\mathcal{Q} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 0.$$

Supponiamo dapprima n dispari, di modo che $n + 1$ è pari e $m = \frac{n+1}{2} - 1$. Il sottospazio α di equazioni:

$$\alpha : \begin{cases} x_1 = i x_{\frac{n+1}{2}+1} \\ \cdots\cdots \\ x_{\frac{n+1}{2}} = i x_{n+1} \end{cases}$$

è contenuto in $\mathcal{Q}$; il sistema è costituito da $\frac{n+1}{2}$ equazioni indipendenti, per cui $\dim(\alpha) = n - \frac{n+1}{2} = m$.

Nel caso in cui n è pari, di modo che $m = \frac{n}{2} - 1$, considerariamo invece il sottospazio

$$\alpha : \begin{cases} x_1 = ix_{\frac{n}{2}+1} \\ \dots \\ x_{\frac{n}{2}} = ix_n \\ x_{n+1} = 0 \end{cases} .$$

In questo caso il sistema è costituito da $\frac{n}{2} + 1$ equazioni indipendenti, e si ottiene ancora $\dim(\alpha) = n - \frac{n}{2} - 1 = m$. $\square$

Corollario 7.7 *Ogni iperquadrica proiettiva complessa è non vuota. Una conica complessa non degenere non contiene rette e tre punti qualsiasi distinti di essa non sono allineati. Una quadrica complessa non degenere contiene rette, ma non contiene piani.*

8 Struttura delle iperquadriche degeneri: conoidi e coni

Definizione 8.1 Si consideri un'iperquadrica $\mathcal{Q} = [k, q]$ di uno spazio geometrico proiettivo n-dimensionale S. Un punto P di S si dice *punto singolare* di $\mathcal{Q}$ se $k(P) = [v]$ con $v \in Rad(q)$.

Si lascia al lettore di verificare che questa definizione è ben posta. Si osservi che evidentemente ogni punto singolare *appartiene* necessariamente a $\mathcal{Q}$.

Proposizione 8.2 *L'insieme dei punti singolari di $\mathcal{Q}$ è un sottospazio proiettivo di dimensione $n - r(\mathcal{Q})$. Esso si chiamerà il* radicale *di $\mathcal{Q}$ e sarà denotato con $Rad(\mathcal{Q})$. Se inoltre $\mathcal{Q} : q(x) = 0$ in un fissato sistema coordinato k, allora rispetto allo stesso sistema coordinato, il radicale di $\mathcal{Q}$ ha equazione:*

$$Rad(\mathcal{Q}) : Ax = 0 \tag{9}$$

dove A è la matrice associata a q nella base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$.

Dimostrazione: Si ha infatti $k(Rad(\mathcal{Q})) = \mathbb{P}(Rad(q))$. $\square$

Corollario 8.3 *Se $\mathcal{C}$ è una conica che come luogo di punti è unione di due rette, allora essa ha un solo punto singolare: il punto di intersezione di tali rette.*

Se $\mathcal{C}$ è una conica reale ridotta ad un solo punto, esso è l'unico punto singolare.

Se $\mathcal{C}$ è una conica di rango 1, allora il suo radicale è la retta con cui essa coincide come luogo di punti.

DIMOSTRAZIONE: È sufficiente considerare un'equazione di $\mathcal{C}$ in forma canonica ed utilizzare la (9). $\square$

Ora diamo una caratterizzazione delle iperquadriche il cui supporto è un sottospazio proiettivo. Risulta che, oltre al caso in cui il supporto è vuoto, ciò accade solo per una particolare classe di iperquadriche degeneri. Cominciamo col discutere la seguente caratterizzazione delle forme quadratiche reali di indice nullo:

Proposizione 8.4 *Sia q una forma quadratica su uno spazio vettoriale reale V. Le proprietà seguenti sono equivalenti:*

a) $i(q) = 0$*;*

b) q *è semidefinita positiva o semidefinita negativa;*

c) $Rad(q) = C(q)$*;*

d) $C(q)$ *è un sottospazio di* V*.*

DIMOSTRAZIONE: Poniamo $b = b_q$ e denotiamo con r il rango di q.

a)$\Rightarrow$ *b*) Se $i(q) = 0$, abbiamo che la segnatura di q è $(r, 0)$ oppure $(0, r)$.

b)$\Rightarrow$ *c*) Nell'ipotesi b), si tratta di provare l'inclusione $C(q) \subset Rad(q)$. Dato un vettore isotropo v, supponiamo per assurdo che v non appartenga a $Rad(q)$; da ciò seguirebbe che $b(v, w) \neq 0$ per almeno un vettore $w \in V$. Essendo v isotropo, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si avrebbe

$$q(\lambda v + w) = 2\lambda b(v, w) + q(w)$$

e quindi sarebbe possibile scegliere due numeri λ_1, λ_2 in modo che $q(\lambda_1 v + w) > 0$ e $q(\lambda_2 v + w) < 0$, il che è contro l'ipotesi.

c)$\Rightarrow$ *d*) Ovvio.

d)$\Rightarrow$ *a*) Assunto che $C(q)$ sia un sottospazio, supponiamo per assurdo $i(q) > 0$. Allora esisterebbero, per il Teorema di Sylvester, due vettori v_1, v_2 tali che:

$$q(v_1) = 1, \; q(v_2) = -1, \; b(v_1, v_2) = 0.$$

I due vettori $v_1 + v_2$ e $v_1 - v_2$ risulterebbero entrambi isotropi; d'altra parte la loro somma è $2v_1$ che non lo è. Ciò contraddirebbe l'ipotesi che $C(q)$ sia un sottospazio. $\square$

Nel caso complesso sussiste il seguente risultato analogo, la cui dimostrazione si lascia al lettore:

Proposizione 8.5 *Sia q una forma quadratica su uno spazio vettoriale complesso V. Le seguenti sono proprietà equivalenti:*

a) $r(q) = 1$;

b) $Rad(q) = C(q)$;

c) $C(q)$ *è un sottospazio di* V.

Passiamo quindi a discutere il seguente risultato che è la traduzione in termini geometrici del contenuto della Proposizione 8.4.

Teorema 8.6 *Sia $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica di uno spazio geometrico proiettivo S reale. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

a) $i(\mathcal{Q}) = 0$;

b) Il supporto di $\mathcal{Q}$ è un sottospazio proiettivo di S;

c) $\mathrm{Supp}(\mathcal{Q}) = Rad(\mathcal{Q})$.

Dimostrazione: Posto $\mathcal{Q} = [k, q]$, ricordando che il supporto di $\mathcal{Q}$ è il luogo $\mathcal{Q}_{k,q}$, abbiamo:

$$k(\mathrm{Supp}(\mathcal{Q})) = \pi(C(q)^*), \ k(Rad(\mathcal{Q})) = \pi(Rad(q)^*),$$

dove $\pi : (\mathbb{K}^{n+1})^* \to \mathbb{K}P_n$ è la proiezione canonica e n è la dimensione di S. Ricordiamo ora che, se E e F sono coni dello spazio vettoriale $\mathbb{K}^{n+1}$, cioè sono sottoinsiemi chiusi rispetto all'operazione di moltiplicazione per gli scalari, si ha $E = F$ se e solo se $\pi(E^*) = \pi(F^*)$. Applicando ciò, abbiamo che b) equivale alla condizione che $C(q)$ sia sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n+1}$; infatti b) equivale al fatto che esista un sottospazio $U \subset \mathbb{K}^{n+1}$ tale che

$$k(\mathrm{Supp}(\mathcal{Q})) = \mathbb{P}(U)$$

ovvero

$$\pi(C(q)^*) = \pi(U^*)$$

il che equivale a

$$C(q) = U$$

essendo $C(q)$ e U entrambi coni di $\mathbb{K}^{n+1}$. In modo simile, abbiamo che c) equivale a richiedere che $C(q) = Rad(q)$. Pertanto l'equivalenza di a), b) e c) si ottiene applicando direttamente l'equivalenza delle a), c) e d) nell'enunciato della Prop. 8.4. □

Per le iperquadriche complesse vale il seguente risultato analogo:

Teorema 8.7 *Sia $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica complessa. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

a) $r(\mathcal{Q}) = 1$

b) Il supporto di $\mathcal{Q}$ è un sottospazio proiettivo di S;

c) $\mathrm{Supp}(\mathcal{Q}) = Rad(\mathcal{Q})$.

Consideriamo ora il caso di un'iperquadrica degenere il cui supporto non è un sottospazio; la struttura di una tale iperquadrica è illustrata dal risultato seguente, che riconduce lo studio delle iperquadriche degeneri al caso non degenere.

Teorema 8.8 *Sia $\mathcal{Q}$ un'iperquadica degenere complessa di rango $r > 1$ ovvero un'iperquadrica degenere reale di indice diverso da zero.*

Sia α un sottospazio di dimensione $r - 1$ tale che

$$\alpha \cap Rad(\mathcal{Q}) = \emptyset.$$

Allora l'iperquadrica $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \cap \alpha$ è non degenere e, nel caso reale, ha lo stesso indice di $\mathcal{Q}$. In particolare essa è non vuota e si ha che $\mathcal{Q}$, come luogo di punti, è l'unione delle rette $[V, P]$ al variare dei punti V in $Rad(\mathcal{Q})$ e P in $\mathcal{Q}'$; in altri termini:

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{Q}) = \bigcup_{\substack{V \in Rad(\mathcal{Q}) \\ P \in \mathcal{Q}'}} [V, P].$$

Diremo che $\mathcal{Q}$ è un conoide di vertice $Rad(\mathcal{Q})$ e direttrice $\mathcal{Q}'$.

DIMOSTRAZIONE: Riguardo la prima affermazione, fissato un sistema coordinato, e posto $k(\alpha) = \mathbb{P}(U)$, osserviamo che dall'ipotesi fatta su α segue che α e $Rad(\mathcal{Q})$ sono complementari, cioè

$$\alpha \vee Rad(\mathcal{Q}) = S,$$

e quindi

$$\mathbb{K}^{n+1} = U \oplus Rad(q).$$

Da ciò si ottiene subito quanto affermato, applicando la Proposizione 1.6, ricordando che il rango e, nel caso reale, l'indice di $\mathcal{Q}'$ coincidono con il rango ovvero l'indice della restrizione $q|_U$ di q ad U. Si noti che, nel caso reale, $\mathcal{Q}'$ non è vuota perchè ha indice positivo (cfr. il Teorema di classificazione). Proviamo l'ultima affermazione: se V in $Rad(\mathcal{Q})$ e $P \in \mathcal{Q}'$, allora, posto $k(V) = [v]$ e $k(P) = [w]$, abbiamo $v \in Rad(q)$ e $w \in U$ con $q(w) = 0$, da cui, per ogni coppia di scalari (λ, μ) si ha:

$$q(\lambda v + \mu w) = \lambda^2 q(v) + 2b_q(v, w) + \mu^2 q(w) = 0.$$

Ciò mostra che la retta $[V, P]$ è contenuta in $\mathcal{Q}$. Viceversa, sia $A \in \mathcal{Q}$ con $k(A) = [u]$, e scriviamo

$$u = v + w, \qquad v \in Rad(q),\ w \in U.$$

Possiamo supporre che A non appartenga nè a $Rad(\mathcal{Q})$, nè a $\mathcal{Q}'$, e quindi che v e w siano entrambi diversi dal vettore nullo. Allora, essendo $b_q(v, w) = 0$, si ha:

$$0 = q(u) = q(w),$$

da cui segue che il punto $P = k^{-1}[w]$ appartiene a $\mathcal{Q}'$. Posto $V = k^{-1}[v] \in Rad(\mathcal{Q})$, abbiamo che $A \in [V, P]$ da cui l'asserto. □

Definizione 8.9 Si chiama *cono* un conoide di uno spazio n- dimensionale reale, che ammetta un unico punto singolare V; si tratta quindi di un'iperquadrica di rango n, costituita dalle rette (dette *generatrici*) congiungenti V con i punti di un'iperquadrica $\mathcal{Q}'$ non degenere, non vuota, di un'iperpiano non passante per V, detta *direttrice*.

ESEMPIO 8.10 Ogni quadrica reale equivalente a $\mathcal{Q}_{1,1} : x_1^2 - x_2^2 = 0$, cioè di rango 2 e indice 1, è unione dei due piani distinti $\pi_1 : x_1 - x_2 = 0$ e $\pi_2 : x_1 + x_2 = 0$. Il suo radicale coincide con la retta r intersezione di tali piani. Considerata una qualsiasi retta sghemba s con r, la nostra quadrica è il conoide di vertice r e avente per base l'insieme $\{P_1, P_2\}$ dei punti di intersezione di s con π_1 e π_2 rispettivamente. Tra le quadriche reali, $\mathcal{Q}_{1,1}$ è l'unico conoide non cono a meno di equivalenza proiettiva.

Similmente, tra le quadriche complesse, l'unico conoide, a meno di equivalenza proiettiva, è la quadrica di rango 2 di equazione canonica:

$$Q : x_1^2 + x_2^2 = 0$$

che è anch'essa unione di due piani.

Esempio 8.11 Nell'ambito delle quadriche reali, i coni sono le quadriche equivalenti a

$$\mathcal{Q}_{2,1} : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

cioè quelle di rango 3 e indice 1. Esse si costruiscono come l'unione delle rette congiungenti un fissato punto V con i punti di una conica non degenere di un fissato piano non passante per V, detta *direttrice*. Facendo riferimento all'equazione canonica di cui sopra, il vertice è il punto di coordinate $(0, 0, 0, 1)$ mentre una direttrice è la conica non degenere e non vuota del piano $\alpha : x_4 = 0$ e avente equazione in questo piano

$$\mathcal{C} : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Infine, nel caso complesso, i coni sono tutte e sole le quadriche di rango 3, cioè di equazione canonica

$$\mathcal{Q} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Con riferimento a questa equazione, il vertice è il punto di coordinate $(0, 0, 0, 1)$ mentre una direttrice è la conica no degenere del piano $\alpha : x_4 = 0$ e avente equazione in questo piano

$$\mathcal{C} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

9 La classificazione proiettiva delle quadriche

Vediamo ora come si specializza il Teorema di classificazione delle iperquadriche nel caso delle quadriche.

Teorema 9.1 *Sia S uno spazio geometrico proiettvo complesso di dimensone 3. Si fissi un sistema coordinato k. Ogni quadrica $\mathcal{Q}$ è proiettivamente equivalente ad una ed una sola delle seguenti:*

$\mathcal{Q}_4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ *(quadrica non degenere)*
$\mathcal{Q}_3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ *(cono)*
$\mathcal{Q}_2 : x_1^2 + x_2^2 = 0$ *(conoide- unione di piani)*
$\mathcal{Q}_1 : x_1^2 = 0$ *(piano doppio).*

Il caso del cono e del conoide è stato già esaminato sopra negli esempi 8.10 e 8.11; il piano doppio è l'unica quadrica che coincide col proprio radicale.

Teorema 9.2 *Sia S uno spazio geometrico proiettvo reale di dimensone 3. Si fissi un sistema coordinato k. Ogni quadrica $\mathcal{Q}$ è proiettivamente equivalente ad una ed una sola delle seguenti:*

$\mathcal{Q}_{4,0} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ *(quadrica vuota)*
$\mathcal{Q}_{3,1} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ *(quadrica ellittica)*
$\mathcal{Q}_{2,2} : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ *(quadrica iperbolica)*
$\mathcal{Q}_{3,0} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ *(cono immaginario- singolo punto)*
$\mathcal{Q}_{2,1} : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ *(cono)*
$\mathcal{Q}_{2,0} : x_1^2 + x_2^2 = 0$ *(retta doppia)*
$\mathcal{Q}_{1,1} : x_1^2 + x_2^2 = 0$ *(conoide- unione di piani)*
$\mathcal{Q}_{1,0} : x_1^2 = 0$ *(piano doppio).*

Abbiamo, a meno di equivalenza proiettiva, un solo cono ed un solo conoide, entrambi di rango 3, già discussi in precedenza. Le quadrica vuota, il cono immaginario, la retta doppia ed il piano doppio sono le quadriche che coincidono col proprio radicale. Il significato dell'attributo "quadrica ellittica" e "quadrica iperbolica" e la differenza tra questi due tipi di quadriche sarà chiarito nel paragrafo seguente, discutendo la nozione di piano tangente.

10 Polarità

Nel seguito consideriamo uno spazio geometrico proiettivo S di dimensione $n \geq 2$ sul campo $\mathbb{K}$.

Definizione 10.1 Data un'iperquadrica $\mathcal{Q} = [k, q]$, due punti P e Q di S, tali che $k(P) = [u]$ e $k(Q) = [v]$ si dicono *coniugati* se i vettori u e v sono ortogonali rispetto alla forma bilineare simmetrica b_q associata a q, cioè se $b_q(u, v) = 0$.

È facile verificare che la definizione è ben posta, cioè non dipende dai particolari vettori u e v di coordinate dei punti, nè dalla particolare rappresentazione di $\mathcal{Q}$. Evidentemente la relazione "essere coniugati" è una relazione simmetrica sull'insieme dei punti dello spazio S.

Si osservi che un punto P è coniugato a se stesso se e solo se $P \in \mathcal{Q}$.

Inoltre se P e Q sono coniugati e $\omega : S \to S'$ è una trasformazione proiettiva tra S ed un altro spazio S' della stessa dimensione, allora $\omega(P)$ e $\omega(Q)$ sono coniugati rispetto all'iperquadrica $\omega(\mathcal{Q})$. La verifica di ciò si lascia al lettore.

Proposizione 10.2 *Sia P un punto non singolare per $\mathcal{Q}$. Allora l'insieme π_P dei punti coniugati a P è un iperpiano, detto* iperpiano polare *di P.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti, abbiamo, fissato il sistema coordinato k, e posto $k(P) = [u]$, che

$$k(\pi_P) = \mathbb{P}(< u >^{\perp}). \tag{10}$$

Ora, poichè P è non singolare, risulta che $< u >^{\perp} = Ker(b_v)$ è un sottospazio n-dimensionale di $\mathbb{K}^{n+1}$, datosi che il funzionale $b_v : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ definito dalla (2) non è nullo. □

Nel caso $n = 2$, si preferisce la notazione p_P per denotare l'iperpiano di un punto, trattandosi di una retta, detta *retta polare* di P.

Osservazione 10.3 Se P e Q sono punti non singolari, vale la seguente proprietà, nota come *teorema di reciprocità*:

$$P \in \pi_Q \iff Q \in \pi_P.$$

Ciò è immediata conseguenza della simmetria della relazione "essere coniugati".

Proposizione 10.4 *Se $P \in S$ è un punto non singolare rispetto all'iperquadrica $\mathcal{Q} = [k, q]$ e $k(P) = [u]$, allora abbiamo che l'iperpiano polare π_P ha equazione in k:*

$$\pi_P : {}^t u A x = 0, \tag{11}$$

dove A denota la matrice associata a q nella base canonica.

La dimostrazione è immediata conseguenza della (10).

Teorema 10.5 *Sia $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica non degenere. L'applicazione*

$$\omega_{\mathcal{Q}} : S \to S^*$$

definita da

$$\omega_{\mathcal{Q}}(P) := \pi_P$$

è una trasformazione proiettiva, detta polarità *associata a $\mathcal{Q}$.*

DIMOSTRAZIONE: Si supponga ancora $\mathcal{Q} : q(x) = 0$ rispetto a un fissato sistema coordinato k. Si consideri il corrispondente sistema coordinato k^* su S^*. Tenendo conto della (11), per definizione di k^*, e ricordando che ${}^t A = A$, si ottiene subito che

$$k^*(\pi_P) = [Au].$$

Ciò implica subito che $k^* \circ \omega_{\mathcal{Q}} \circ k^{-1} = \omega_{L_A}$, da cui l'asserto. □

Resta provato in particolare che la polarità è una bigezione; ciò porta a dare la seguente:

Definizione 10.6 Se $\mathcal{Q}$ è un'iperquadrica non degenere ed α è un iperpiano, l'unico punto tale che $\pi_P = \alpha$ si dirà il *polo* di α rispetto a $\mathcal{Q}$.

Osservazione 10.7 Nel caso di una conica $\mathcal{C}$ non degenere, se $r = [A, B]$ è una retta, con $A \neq B$, allora il suo polo P è il punto di intersezione tra p_A e p_B. Si osservi che tali rette sono distinte in virtù dell'ingettività della polarità associata a $\mathcal{C}$.

Infatti, per il teorema di reciprocità, da $A \in r = p_P$ segue che $P \in p_A$ e analogamente abbiamo anche che $P \in p_B$.

Passiamo ad esaminare il significato geometrico dell'iperpiano polare di un punto, considerando separatamente i casi di un punto appartenente all'iperquadrica e il caso di un punto non appartenente ad essa.

Teorema 10.8 *Sia $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica non degenere e sia $P \in S$. Allora sono equivalenti:*

a) $P \in \mathcal{Q}$;

b) $\mathcal{Q} \cap \pi_P$ è degenere.

Inoltre, vera una di queste condizioni, $\mathcal{Q} \cap \pi_P$ ha rango $n-1$ e P è il suo unico punto singolare.

Dimostrazione: Si assuma $\mathcal{Q} = [k, q]$ e $k(P) = [u]$. Allora, essendo $k(\pi_P) = \mathbb{P}(< u >^{\perp})$, abbiamo che $\mathcal{Q} \cap \pi_P$ è degenere se e solo se tale è la restrizione di q al sottospazio $< u >^{\perp}$. D'altra parte (Prop. 1.5) il radicale $Rad(q|_U)$ di tale restrizione è dato da

$$< u >^{\perp} \cap \left(< u >^{\perp}\right)^{\perp} =< u >^{\perp} \cap < u >$$

che è un sottospazio vettoriale dello spazio 1-dimensionale $< u >$, per cui esso è non banale se e solo se coincide con $< u >$ o equivalentemente u appartiene ad esso, ovvero, se e solo se $u \in< u >^{\perp}$, il che significa $P \in \mathcal{Q}$. In tal caso $\mathrm{Rad}(\mathcal{Q} \cap \pi_P)$ ha dimensione 0, sicchè $\mathcal{Q} \cap \pi_P$ ha esattamente un punto singolare ed ha rango $n-1$. D'altra parte usando ancora il fatto che $u \in Rad(q|_{<u>^{\perp}})$ si verifica agevolmente che P è punto singolare della stessa iperquadrica. Infatti, posto $U :=< u >^{\perp}$, basta ricordare che, rispetto a un sistema coordinato del tipo $\bar{k} = \omega_F \circ (k_{|\pi_P})_{\#}$ indotto su π_P, dove $F :< u >^{\perp} \to \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo, lo stesso punto ha vettore di coordinate omogenee $F(u)$. Ora, è facile controllare che:

$$Rad(q_{|U} \circ F^{-1}) = F(Rad(q_{|U}))$$

il che implica che in particolare che $F(u)$ appartiene al radicale di $q_{|U} \circ F^{-1}$, e ciò per definizione vuol dire che P è un punto singolare di $\mathcal{Q} \cap \pi_P = [\bar{k}, q_{|U} \circ F^{-1}]$. $\square$

Discutiamo ora due teoremi che chiariscono il significato geometrico dell'iperpiano polare di un punto.

Teorema 10.9 *Sia $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica non degenere e $P \in \mathcal{Q}$. Se r è una retta passante per P, risulta*

$$r \subset \pi_P \iff r \text{ è contenuta in } \mathcal{Q} \text{ oppure è tangente a } \mathcal{Q}.$$

Dunque π_P è l'unione delle rette per P tangenti alla iperquadrica ovvero contenute in essa.

DIMOSTRAZIONE:
Si assuma $\mathcal{Q} = [k, q]$, $k(P) = [u]$, e si ponga $b = b_q$. Considerato un punto qualsiasi $A \in S$ diverso da P, con $k(A) = [v]$, abbiamo che la retta $[P, A]$ è tangente a $\mathcal{Q}$ o contenuta in essa se e solo se il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} q(u) & b(u, v) \\ b(v, u) & q(v) \end{pmatrix}$$

è nullo; poichè $q(u) = 0$, ciò accade se e solo se $b(u, v) = 0$, cioè se e solo se A è coniugato a P, cioè (siccome $P \in \pi_P$) se e solo se $[A, P] \subset \pi_P$. □

Questo risultato giustifica la seguente terminologia:

Definizione 10.10 L'iperpiano polare π_P di un punto P *appartenente* all' iperquadrica viene anche chiamato *iperpiano tangente a $\mathcal{Q}$* in P. Un iperpiano α verrà detto *tangente* all'iperquadrica se e solo se il suo polo appartiene ad essa.

Teorema 10.11 *Sia $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica non degenere e P un punto tale che $P \notin \mathcal{Q}$. Se r è una retta passante per P, risulta*

$$r \text{ è tangente a } \mathcal{Q} \iff \exists A \in \mathcal{Q} \cap \pi_P \text{ t.c. } r = [P, A].$$

DIMOSTRAZIONE: Assunto $\mathcal{Q} = [k, q]$, $k(P) = [u]$, e posto $b = b_q$, se r è tangente, posto $\mathcal{Q} \cap r = \{A\}$ e $k(A) = [w]$, il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} q(u) & b(u, w) \\ b(u, w) & q(w) \end{pmatrix}$$

è nullo; ma $q(w) = 0$, in quanto A appartiene a $\mathcal{Q}$; pertanto $b(u, w) = 0$, sicchè $A \in \mathcal{Q} \cap \pi_P$. Viceversa, se $r = [P, A]$ con $A \in \mathcal{Q} \cap \pi_P$, e posto ancora $k(A) = [w]$, si ha $q(w) = b(u, w) = 0$, per cui la matrice di cui sopra è non nulla e singolare, e quindi r è tangente a $\mathcal{Q}$. □

Discutiamo ora alcune conseguenze dei risultati precedenti, applicati al caso delle coniche e delle quadriche.

Corollario 10.12 *Sia considerino una conica non degenere $\mathcal{C}$ di un piano geometrico proiettivo ed un punto $P \in S$.*

1) Se $P \in \mathcal{C}$, allora la polare p_P di P è tangente alla conica ed è l'unica retta tangente a $\mathcal{C}$ passante per P.

2) Se $P \notin \mathcal{C}$, allora:
a) Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: la polare p_P è secante $\mathcal{C}$. Assunto che $\mathcal{C} \cap p_P = \{T_1, T_2\}$, le rette $[P, T_1]$ e $[P, T_2]$ sono le uniche due rette per P tangenti a $\mathcal{C}$.

b) Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: la polare p_P è esterna o secante $\mathcal{C}$. Nel primo caso P si dirà interno *a $\mathcal{C}$. Nel secondo caso P si dirà* esterno *a $\mathcal{C}$; in tal caso, se $\mathcal{C} \cap p_P = \{T_1, T_2\}$, le rette $[P, T_1]$ e $[P, T_2]$ sono le uniche due rette per P tangenti a $\mathcal{C}$.*

DIMOSTRAZIONE: 1) La prima affermazione affermazione è immediata conseguenza del teorema 10.9, in quanto $\mathcal{C}$ non contiene rette e p_P è una retta.
2) Se $P \notin \mathcal{C}$, allora $\mathcal{C} \cap p_P$ è un'iperquadrica non degenere di p_P, e quindi nel caso complesso è costituita da due punti distinti, mentre nel caso reale è vuota oppure costituita da due punti distinti. Se p_C è secante, sia nel caso complesso che in quello reale, segue immediatamente dal Teorema 10.11 che le uniche tangenti a $\mathcal{C}$ passanti per P sono le rette $[P, V_1]$ e $[P, V_2]$ dove V_1 e V_2 sono i punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con p_P. □

Esaminiamo ora il caso delle quadriche.

Definizione 10.13 Se $\mathcal{Q}$ è una quadrica, per ogni punto P, la conica $\mathcal{Q} \cap \pi_P$ si denoterà con $\mathcal{C}_p$.

Teorema 10.14 *Per ogni punto di una quadrica complessa non degenere passano esattamente due rette contenute in essa.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti, per il Teorema 10.8, se $P \in \mathcal{Q}$ la conica $\mathcal{C}_p$ ha rango 2, e quindi è unione di due rette, incidenti nel punto singolare P. Evidentemente il Teorema 10.9 garantisce che tali rette sono le uniche rette contenute nella quadrica e passanti per P. □

Esaminiamo ora il caso reale. Vi sono due possibilità riguardo la conica $\mathcal{C}_P$ di rango 2, per cui è conveniente dare la seguente:

Definizione 10.15 Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica reale non degenere, non vuota. Un punto $P \in \mathcal{Q}$ si dirà *ellittico* se la conica $\mathcal{C}_p$ è costituita dal solo punto P, ovvero *iperbolico* nel caso in cui $\mathcal{C}_P$ è unione di due rette.

Osserviamo ancora che se P è ellittico, non esistono rette contenute nella quadrica e passanti per P; nel caso di un punto iperbolico esistono esattamente due rette per P contenute nella quadrica, e sono le componenti di $\mathcal{C}_P$.

Esempio 10.16 Il lettore verifichi direttamente che, ad es., il punto $P(0,0,1,1)$ della quadrica $\mathcal{Q}_{3,1} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ di indice 1 è ellittico, mentre il punto $P(1,0,1,0)$ della quadrica $\mathcal{Q}_{2,2} : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ di indice 2 è iperbolico.

Teorema 10.17 *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica reale non degenere, non vuota. Allora i punti di $\mathcal{Q}$ sono o tutti ellittici o tutti iperbolici. La prima eventualità si verifica se e solo se $\mathcal{Q}$ ha indice 1, la seconda se e solo se $\mathcal{Q}$ ha indice 2.*

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che $\mathcal{Q}$ ammetta un punto ellittico P_1 ed uno iperbolico P_2. Si consideri dunque una delle due rette passanti per P_2 e contenute in $\mathcal{Q}$ e la si denoti con s. Ovviamente tale retta non passa per P_1, perchè P_1 è ellittico. Sia α il piano contenente s e P_1, ovvero $\alpha = s \vee \{P_1\}$. La conica $\mathcal{Q} \cap \alpha$ di α contiene pertanto sia s che P_1, e quindi è degenere; allora essa deve anche contenere un'altra retta t necessariamente passante per P_1. Ma $t \subset \mathcal{Q}$ e ciò contraddice il fatto che P_1 è ellittico.

Riguardo le ultime affermazioni, se $\mathcal{Q}$ ha indice 1, sappiamo, per il significato geometrico dell'indice, Teorema 7.2, che essa non contiene rette, per cui tutti i suoi punti dovranno essere ellittici. Se invece $\mathcal{Q}$ ha indice 2, allora per lo stesso Teorema, $\mathcal{Q}$ contiene rette: detta s una retta contenuta in $\mathcal{Q}$ e considerato un punto $P \in s$, allora il punto P è iperbolico.

Alternativamente, per provare queste ultime affermazioni, si può far riferimento a quanto visto nell'esempio 10.16. □

In forza del risultato precedente, si adotta la seguente terminologia.

Definizione 10.18 Una quadrica reale non degenere di indice 1 si dice *ellittica*. Una quadrica non degenere reale di indice 2 si dice *iperbolica*.

Un criterio semplice per distinguere tra queste due tipologie è il seguente:

Proposizione 10.19 *Sia $\mathcal{Q} = [k, q]$ una quadrica reale non vuota. Denotata con A la matrice associata a q nella base canonica, si ha:*

$$\mathcal{Q} \text{ è ellittica} \iff \det(A) < 0$$

$$\mathcal{Q} \text{ è iperbolica} \iff \det(A) > 0.$$

Dimostrazione: Infatti, le due eventualità corrispondono alla circostanza che q abbia segnatura $(3, 1)$ o $(1, 3)$, ovvero segnatura $(2, 2)$; la prima si verifica se e solo se A ammette tre autovalori positivi ed uno negativo o tre autovalori negativi ed uno positivo, mentre la seconda se e solo se A ha due autovalori positivi e due negativi. Tenendo conto che $\det(A)$ è il prodotto degli autovalori di A si perviene subito alla conclusione, in quanto per l'ipotesi fatta, a priori q non può essere nè definita positiva, nè definita negativa. $\square$

11 L'involuzione dei punti coniugati

Teorema 11.1 *Sia r una retta esterna o secante un'iperquadrica $\mathcal{Q}$. Allora ogni punto P di r ammette uno ed un solo punto P' ad esso coniugato appartenente a r. L'applicazione $\omega_r : r \to r$ definita da*

$$\omega_r(P) = P'$$

è un'involuzione, detta involuzione dei punti coniugati su r determinata da $\mathcal{Q}$.

Essa è ellittica se e solo se r è esterna a $\mathcal{Q}$, mentre è iperbolica se e solo se r è secante, e in questo caso ammette come punti uniti i punti di intersezione tra r e $\mathcal{Q}$.

Si ricordi che, nel caso complesso, r non può essere mai esterna a $\mathcal{Q}$.

Dimostrazione: Cominciamo con l'osservare che ogni punto P di r ammette uno ed un solo punto P' ad esso coniugato appartenente a r; risulta infatti $r \not\subset \pi_P$ per l'ipotesi fatta sulla posizione reciproca tra $\mathcal{Q}$ ed r: ciò è chiaro nel caso di un punto $P \notin \mathcal{Q}$, perchè $P \notin \pi_P$. Se invece $P \in \mathcal{Q}$, se fosse $r \subset \pi_P$, allora per il Teorema 10.9, r dovrebbe essere tangente a $\mathcal{Q}$ oppure contenuta in $\mathcal{Q}$, contro l'ipotesi. Dunque r è incidente l'iperpiano π_P e posto $r \cap \pi_P = \{P'\}$, il punto P' è l'unico punto coniugato a P sulla retta r. Evidentemente, per ogni $P \in r$ si ha $(P')' = P$. Proviamo ora che l'applicazione ω_r è un'involuzione. Chiaramente $\omega_r \circ \omega_r = Id_r$ e inoltre essa non è l'identità in quanto

$$P = P' \iff P \in \pi_P \iff P \in \mathcal{Q}.$$

Resta da provare che ω_r è una trasformazione proiettiva. A questo scopo, fissiamo un punto $A \in r$ non appartenente a $\mathcal{Q}$ e si ponga $B = A'$. Notiamo che $B \notin \mathcal{Q}$ perchè altrimenti B sarebbe autoconiugato e quindi $A = B' = B$, pervenendo così ad una contraddizione.

Fissato un sistema coordinato k, si assuma $\mathcal{Q} : q(x) = 0$ rispetto a k e $k(A) = [u]$, $k(B) = [v]$, di modo che $k(r) = \mathbb{P}(< u, v >)$; sia $\bar{k}$ il sistema coordinato indotto sulla retta r, relativo alla base $\{u, v\}$ del sottospazio $< u, v >$, ovvero

$$\bar{k} = \omega_F \circ (k|_r)_{\#},$$

dove $F :< u, v > \to \mathbb{K}^2$ è l'isomorfismo che trasforma $\{u, v\}$ nella base canonica di $\mathbb{K}^2$. Per costruzione, i punti A e B hanno ascisse proiettive rispettivamente $\xi = \infty$ e $\xi = 0$ rispetto a $\bar{k}$. Esplicitiamo la condizione che due punti P e Q di r entrambi diversi da A e da B siano coniugati; assumendo $k(P) = [\xi u + v]$ e $k(Q) = [\xi' u + v]$, con $\xi, \xi' \in \mathbb{K}^*$, abbiamo, tenendo conto che $b_q(u, v) = 0$:

$$Q = P' \iff b_q(\xi u + v, \xi' u + v) = 0 \iff q(u)\xi\xi' + q(v) = 0.$$

Discende da ciò che ω_r coincide con la proiettività $\omega_o : r \to r$ di equazione bilineare in $\bar{k}$:

$$\omega_o : q(u)\xi\xi' + q(v) = 0,$$

che ha senso considerare in quanto $q(u)q(v) \neq 0$. Infatti, l'equazione di ω_o fornisce $\omega_o(A) = B$ e $\omega_o(B) = A$ per cui ω e ω_o coincidono sul sottoinsieme $\{A, B\}$; inoltre ovviamente abbiamo da quanto precede che ω e ω_o coincidono su $r - \{A, B\}$.

Infine, come si è già osservato, un punto di r è unito in ω_r se e solo se è autoconiugato, cioè se e solo se appartiene a $\mathcal{Q}$, il che prova le ultime affermazioni. $\square$

Corollario 11.2 *Sia r una retta secante un'iperquadrica $\mathcal{Q}$ e si ponga $\mathcal{Q} \cap r = \{A, B\}$. Allora, per ogni $P \in r$ diverso da A e B il quarto armonico dopo A, B e P è l'unico punto di r coniugato a P rispetto a $\mathcal{Q}$.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti l'involuzione dei punti coniugati coincide in tal caso con l'unica involuzione iperbolica avente per punti uniti A e B, per cui $(A\,B\,P\,\omega_r(P)) = -1$ ricordando che l'invariante assoluto di un'involuzione è -1. $\square$

Nel caso delle coniche vi è un'altra involuzione notevole legata al concetto di punti coniugati.

Definizione 11.3 Sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere di un piano geometrico proiettivo. Due rette r e s si dicono *coniugate* rispetto a $\mathcal{C}$ se una passa per il polo dell'altra.

Osservazione 11.4 Si noti che se $r = p_A$ e $r = p_B$, allora dire che r e s sono coniugate equivale a dire che i poli A e B sono coniugati.

La relazione "essere coniugate" che viene così ad introdursi sul piano duale S^* è simmetrica.

Teorema 11.5 *Si considerino una conica non degenere $\mathcal{C}$ ed un punto $C \notin \mathcal{C}$. Per ogni retta $r \in \mathfrak{F}(C)$ esiste una ed una sola retta $r' \in \mathfrak{F}(C)$ coniugata ad essa. L'applicazione*

$$\omega_C : r \in \mathfrak{F}(C) \mapsto r' \in \mathfrak{F}(C)$$

è un'involuzione, detta involuzione delle rette coniugate *rispetto a $\mathcal{C}$.*

Inoltre, posto $t := p_C$ e denotata con $\omega_o : t \to \mathfrak{F}(C)$ la proiezione della retta t sul fascio, risulta

$$\omega_C = \omega_o \circ \omega_t \circ \omega_o^{-1} \tag{12}$$

essendo $\omega_t : t \to t$ l'involuzione dei punti coniugati su t.

Infine, ω è ellittica se e solo se C è interno a $\mathcal{C}$, mentre ω è iperbolica se e solo se C è esterno a $\mathcal{C}$ ed in tal caso i punti uniti di ω_C sono le tangenti condotte da C alla conica.

DIMOSTRAZIONE: Si osservi intanto che $C \notin t$ perchè C non appartiene alla conica, per cui ha senso considerare la proiezione di t su $\mathfrak{F}(C)$. Sia $r \in \mathfrak{F}(C)$ una retta qualsiasi; allora l'unica retta coniugata a r e passante per C è $r' := [C, R]$, dove R è il polo di r; si noti che $R \neq C$ perchè altrimenti si avrebbe $C \in p_C$, contro il fatto che $C \notin \mathcal{C}$. Pertanto l'applicazione ω_C è ben definita. Per provare che ω_C è un'involuzione, è sufficiente verificare la (12). Considerato un punto $X \in t$, il polo R della retta $\omega_o(X) = [C, X]$ è il punto comune alle polari p_C e p_X (Osservazione 10.7). D'altra parte, per definizione di ω_t, abbiamo che anche $\omega_t(X)$ è il punto di intersezione tra p_X e p_C, essendo l'unico punto su p_C coniugato a X. Dunque

$$\omega_t(X) = R$$

e quindi in definitiva resta provato che per ogni $X \in t$:

$$\omega_C([C, X]) = [C, \omega_t(X)]. \tag{13}$$

e con ciò la (12). È chiaro infine che una retta r è unita in ω_C se e e solo se il punto $\omega_o^{-1}(r)$ è unito in ω_t, sicchè ω_C è iperbolica se e solo se lo è ω_t, il che accade se e solo se t è secante la conica. In questo caso, dalla (13) si ha subito che le tangenti t_1 e t_2 condotte da C alla conica sono unite; basta ricordare che $t_i = [C, T_i]$ dove T_1 e T_2 sono i punti di intersezione di t con $\mathcal{C}$:

$$\omega_C(t_i) = \omega_C([C, T_i]) = [C, \omega_t(T_i)] = [C, T_i],$$

dove si è utilizzato il fatto che tali punti sono i punti uniti di ω_t. □

Osservazione 11.6 Nelle ipotesi del teorema, dalla (12) segue che due rette r e r' del fascio $\mathfrak{F}(C)$ sono coniugate se e solo se lo sono i corrispondenti punti di intersezione X e X' con la polare p_C di C.

Concludiamo questo paragrafo con dei cenni riguardanti i fasci di coniche. Ricordiamo che l'insieme di tutte le iperquadriche $Q(S)$ di uno spazio geometrico proiettivo n-dimensionale è uno spazio proiettivo di dimensione $n(n+3)/2$.

Definizione 11.7 Si chiama *fascio di iperquadriche* di S ogni retta di $Q(S)$.

Se $\mathfrak{F} \subset Q(S)$, è un fascio, e $\mathfrak{F} = [\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2]$, allora, assunto che $\mathcal{Q}_i : q_i(x) = 0$ rispetto a un fissato sistema coordinato k, allora le iperquadriche di $\mathfrak{F}$ sono tutte e sole quelle di equazione

$$\mathcal{Q} : \lambda q_1(x) + \mu q_2(x) = 0, \quad (\lambda, \mu) \in (\mathbb{K}^2)^*.$$

Infatti, abbiamo $\mathcal{Q}_i = [k, q_i]$ e, considerando la trasformazione proiettiva

$$k : S(Q) \to \mathbb{P}(Q(\mathbb{K}^{n+1}))$$

definita dalla (5), abbiamo che $k(\mathfrak{F}) = [[q_1], [q_2]]$, sicchè la generica iperquadrica del fascio è $\mathcal{Q} = [k, \lambda q_1 + \mu q_2]$.

Descriviamo qui di seguito tre tipologie rilevanti di fasci di coniche.

Teorema 11.8 *Sia S un piano proiettivo.*

a) Siano A, B, C, D quattro punti in posizione generale. Allora l'insieme di tutte e sole le coniche $\mathcal{C}$ passanti per tali punti è un fascio, detto fascio generale con punti base A, B, C, D. *Le coniche degeneri di tale fascio sono sono esattamente tre, tutte di rango 2, i cui supporti sono:*

$$[A, B] \cup [C, D], \; [A, D] \cup [B, C], \; [A, C] \cup [B, D].$$

b) Siano A, B, C tre punti non allineati e t una retta passante per A e tale che $t \cap \{B, C\} = \emptyset$. Allora esiste uno ed un solo fascio di coniche le cui coniche non degeneri sono tutte e sole quelle tangenti a t in A e passanti per B e C. Esso prende il nome di fascio di coniche tangenti. *Le coniche degeneri di tale fascio sono esattamente due e di rango 2, i cui supporti sono:*

$$t \cup [B, C], \; [A, B] \cup [A, C].$$

c) Siano t_1 e t_2 due rette distinte e A e B punti di t_1 e di t_2 rispettivamente, entrambi diversi dal punto di intersezione tra t_1 e t_2. Allora esiste uno ed un solo fascio di coniche le cui coniche non degeneri sono tutte e sole quelle tangenti a t_1 in A e a t_2 in B. Esso prende il nome di fascio di coniche bitangenti. *Le coniche degeneri di tale fascio sono esattamente due, di cui una di rango 2, il cui supporto è:*

$$t_1 \cup t_2$$

e una di rango 1, il cui supporto è la retta $[A, B]$.

Dimostrazione: a) Consideriamo il sistema coordinato k su S dato dalla trasformazione proiettiva $k : S \to \mathbb{K}P_2$ tale che:

$$k(A) = [1,0,0],\ k(B) = [0,1,0],\ k(C) = [0,0,1],\ k(D) = [1,1,1]. \qquad (14)$$

Sia $\mathcal{C} = [k, q]$ una conica. Essa passa per i punti A, B, C se e solo se la matrice di q è della forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\mathcal{C} : \alpha x_1 x_2 + \beta x_1 x_3 + \gamma x_2 x_3 = 0.$$

Si osservi che il determinante di M è dato da $2\alpha\beta\gamma$. Imponendo anche il passaggio per D abbiamo

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Possiamo concludere che l'equazione della generica conica passante per i quattro punti in questione è:

$$\mathcal{C} : \alpha x_2(x_1 - x_3) + \beta x_3(x_1 - x_2) = 0$$

ed essa è degenere se e solo se $\alpha = 0$, oppure $\beta = 0$ oppure $\alpha + \beta = 0$. Si ottiene quindi che l'insieme delle coniche in esame è il fascio $\mathfrak{F} = [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$ individuato dalle coniche degeneri

$$\mathcal{C}_1 : x_2(x_1 - x_3) = 0, \quad \mathcal{C}_2 : x_3(x_1 - x_2) = 0.$$

La conica $\mathcal{C}_3$ che corrisponde alla condizione $\alpha + \beta = 0$ è l'unica conica degenere di $\mathfrak{F}$ diversa da esse, di equazione

$$\mathcal{C}_3 : x_1(x_2 - x_3) = 0.$$

Tenendo conto delle loro equazioni, ricaviamo subito la conclusione relativa ai supporti delle coniche $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$.

b) Consideriamo un punto $D \in t$, diverso da A e dal punto di intersezione tra t e la retta $[B, C]$, di modo che A, B, C, D sono in posizione generale, e il sistema coordinato determinato ancora dalle (14). Rispetto a k abbiamo:

$$t : x_2 - x_3 = 0,\ [B, C] : x_1 = 0.$$

Considerata una conica non degenere, di equazione

$$\mathcal{C} :\ {}^t x M x = 0$$

abbiamo che essa è tangente a t in A se e solo se $p_A = t$; ricordando che

$$p_A : (1\ 0\ 0)Mx = 0,$$

confrontando con l'equazione di t, abbiamo che ciò accade se e solo se la prima riga di M è proporzionale a $(0\ 1\ -1)$. Pertanto $\mathcal{C}$ verifica tale condizione e passa per i punti B e C se e solo se M è della forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & -\lambda \\ \lambda & 0 & \mu \\ -\lambda & \mu & 0 \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\mathcal{C} : \lambda x_1(x_2 - x_3) + \mu x_2 x_3 = 0,$$

con $\det(M) = -2\lambda^2\mu \neq 0$. Pertanto le coniche non degeneri soddisfacenti le nostre condizioni appartengono tutte al fascio $\mathfrak{F} = [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$ dove

$$\mathcal{C}_1 : x_1(x_2 - x_3) = 0,\ \mathcal{C}_2 : x_2x_3 = 0.$$

È chiaro che tale fascio è l'unica retta di $Q(S)$ che contiene le coniche non degeneri in questione. Infine, le coniche degeneri di $\mathfrak{F}$ sono soltanto $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, corrispondenti a $\mu = 0$ e $\lambda = 0$, e dalle relative equazioni otteniamo quanto asserito relativamente ai supporti.

c) Scegliamo due punti $C \in t_1$ e $D \in t_2$ diversi da A e da B e dal punto di intersezione tra t_1 e t_2. I punti A, B, C, D sono ancora in posizione generale e quindi individuano il sistema coordinato determinato dalle (14). Rispetto a k abbiamo:

$$t_1 : x_2 = 0,\ t_2 : x_1 - x_3 = 0.$$

Considerata una conica non degenere, di equazione

$$\mathcal{C} : {}^t x M x = 0,$$

abbiamo che essa è tangente a t_1 in A e a t_2 in B se e solo se $p_A = t_1$ e $p_B = t_2$; con considerazioni analoghe a quanto visto nel punto b), otteniamo che ciò accade se e solo se M è della forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & \mu \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\mathcal{C} : 2\lambda x_1 x_2 - 2\lambda x_2 x_3 + \mu x_3^2 = 0,$$

dove $\det(M) = -\lambda^2\mu \neq 0$. Pertanto le coniche non degeneri soddisfacenti tali condizioni appartengono tutte al fascio $\mathfrak{F} = [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$ dove

$$\mathcal{C}_1 : x_2(x_1 - x_3) = 0,\ \mathcal{C}_2 : x_3^2 = 0.$$

Tale fascio è l'unica retta di $Q(S)$ che contiene le coniche non degeneri in questione. Infine, le coniche degeneri di $\mathfrak{F}$ sono soltanto $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e si perviene così alla conclusione. $\square$

12 Iperquadriche affini e centro

In questo paragrafo cominciamo lo studio delle iperquadriche nel contesto di uno spazio proiettivo dato dall'estensione proiettiva di uno spazio affine. Nel seguito consideriamo uno spazio affine $\mathcal{A}$ sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione $n \geq 2$, associato allo spazio vettoriale V.

Dato un riferimento affine $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, denoteremo di norma con $x_1, \ldots, x_n$ le relative coordinate affini e con $x_1, \ldots, x_n, t$ le coordinate omogenee sull'estensione proiettiva $S(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \pi_\infty$, relative al sistema coordinato $k_\mathcal{R}$ dedotto da $\mathcal{R}$. Nel caso $n = 2$ (risp. $n = 3$), si preferirà denotare con x, y le coordinate affini (risp. con x, y, z). Inoltre, nel caso $n = 2$ denoteremo con X_∞, Y_∞ le direzioni degli assi del riferimento, mentre per $n = 3$ analogo significato avranno i simboli X_∞, Y_∞ e Z_∞.

Definizione 12.1 Un'iperquadrica $\mathcal{Q}$ di $S(\mathcal{A})$ si dice iperquadrica *affine* se

$$\pi_\infty \not\subset \mathcal{Q}.$$

Si chiama *parte affine* di $\mathcal{Q}$ il sottoinsieme $\mathrm{Supp}(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{A}$ di $\mathcal{A}$, mentre si chiama *iperquadrica all'infinito* di $\mathcal{Q}$ l'iperquadrica $\mathcal{Q} \cap \pi_\infty$ dell'iperpiano π_∞, il cui supporto si chiama anche *parte all'infinito* di $\mathcal{Q}$. Tale iperquadrica si denoterà con $\mathcal{Q}_\infty$. Nel caso di una quadrica, trattandosi di una conica (*conica all'infinito*), si preferirà adottare il simbolo $\mathcal{C}_\infty$.

Cominciamo col discutere l'iperquadrica all'infinito di una qualsiasi iperquadrica affine (eventualmente degenere). Supponendo $\mathcal{Q}$ di equazione

$$\mathcal{Q} : q(x, t) = 0$$

rispetto a un sistema coordinato dedotto da un riferimento affine $\mathcal{R}$, scriviamo la matrice A associata a q rispetto alla base canonica $\{e_i\}$ di $\mathbb{K}^{n+1}$ nella seguente forma a blocchi:

$$A = \begin{pmatrix} B & \beta \\ {}^t\beta & \gamma \end{pmatrix}. \tag{15}$$

La sottomatrice B è simmetrica di ordine n, $\beta \in \mathbb{K}^n$ è un vettore colonna e $\gamma \in \mathbb{K}$. Si noti che $B \neq 0$, in quanto l'iperpiano improprio π_∞ non è contenuto in $\mathcal{Q}$.

Il ruolo della matrice B è quello di permettere di classificare (dal punto di vista proiettivo) l'iperquadrica all'infinito di $\mathcal{Q}$. Infatti, l'equazione di π_∞ rispetto a $k_\mathcal{R}$ è

$$\pi_\infty : t = 0,$$

ovvero

$$k_\mathcal{R}(\pi_\infty) = \mathbb{P}(U),$$

dove U è il sottospazio vettoriale $< e_1, \ldots, e_n >$ di $\mathbb{K}^{n+1}$. Su π_∞ si può considerare un sistema coordinato indotto $\bar{k}$, rispetto al quale, per ogni direzione $D_\infty(x_1, \ldots, x_n, 0) \in \pi_\infty$ risulta:

$$\bar{k}(D_\infty) = [x_1, \ldots, x_n].$$

Un tale sistema coordinato si ottiene come composizione

$$\bar{k} = \omega_F \circ (k_{\mathcal{R}}|_{\pi_\infty})_\#,$$

dove $F : U \to \mathbb{K}^n$ è l'isomorfismo naturale

$$F(x_1, \ldots, x_n, 0) := (x_1, \ldots, x_n).$$

Allora, rispetto a questo sistema coordinato, l'iperquadrica $\mathcal{Q}_\infty$ ha equazione:

$$\mathcal{Q}_\infty : {}^t\!xBx = 0. \tag{16}$$

Ciò si giustifica subito ricordando che per definizione $\mathcal{Q}_\infty = \mathcal{Q} \cap \pi_\infty = [\bar{k}, q|_U \circ F^{-1}]$, e risulta, per ogni $x \in \mathbb{K}^n$:

$$(q \circ F^{-1})(x) = q(x_1, \ldots, x_n, 0) = {}^t\!xBx.$$

Ai fini di distinguere le iperquadriche affini tenendo conto della posizione reciproca rispetto all'iperpiano all'infinito, nel caso non degenere si introduce la seguente definizione:

Definizione 12.2 Sia $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica affine non degenere. Si chiama *centro* di $\mathcal{Q}$ il polo dell'iperpiano improprio π_∞.

Si noti che la definizione è ben posta stante la non degeneratezza di $\mathcal{Q}$.

Definizione 12.3 Un'iperquadrica affine si dice *a centro* se il suo centro è un punto proprio, altrimenti si dice *non a centro*.

Dunque, dire che $\mathcal{Q}$ non è a centro equivale a dire che π_∞ è tangente a $\mathcal{Q}$, ovvero che $\mathcal{Q}_\infty$ è degenere (cf. Teorema 10.8). In tal caso, il centro C_∞ è l'unico punto singolare dell'iperquadrica $\mathcal{Q}_\infty$, che ha rango $n-1$. Abbiamo anche la seguente semplice caratterizzazione:

Proposizione 12.4 *Per ogni iperquadrica non degenere di centro C si ha:*

$$\mathcal{Q} \text{ è a centro} \iff C \notin \mathcal{Q}.$$

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di applicare il teorema di reciprocità: abbiamo che $C \in \pi_\infty$ se e solo se $C \in \pi_C$ ovvero $C \in \mathcal{Q}$. □

Nel caso delle iperquadriche a centro, il significato geometrico del centro è dato dal risultato seguente:

Teorema 12.5 *Se $\mathcal{Q}$ è a centro, essa è simmetrica rispetto al suo centro C, nel senso che per ogni punto proprio P appartenente a $\mathcal{Q}$, il simmetrico P' di P rispetto a C appartiene anch'esso a $\mathcal{Q}$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $P \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{A}$; consideriamo la retta $t := [C, P]$. Affermiamo che tale retta è secante $\mathcal{Q}$: infatti, certamente non è esterna, nè contenuta in $\mathcal{Q}$ in quanto $C \notin \mathcal{Q}$. Si tratta di escludere anche che sia tangente a $\mathcal{Q}$; infatti, se così fosse, si avrebbe $t \subset \pi_P$, da cui in particolare $C \in \pi_P$, da cui, per reciprocità, $P \in \pi_C = \pi_\infty$, contraddizione. Denotiamo allora con P' l'altro punto di intersezione tra t e $\mathcal{Q}$. Sappiamo (Teorema 11.1) che ogni punto di t ammette un unico coniugato sulla stessa retta; applicando questo fatto alla direzione T_∞ di t, abbiamo che l'unico punto coniugato ad essa su t è C, per definizione di centro. Allora, per il Corollario 11.2, C è il quarto armonico dopo P, P' e T_∞, e quindi coincide con il punto medio tra P e P' per una nota proprietà del birapporto. Ciò significa che P' è il simmetrico di P rispetto a C e il teorema è provato. □

Nel caso della coniche e delle quadriche, si introduce la seguente terminologia, che tiene conto delle varie possibilità relative alla posizione reciproca tra essa e la retta impropria, ovvero tra essa ed il piano improprio:

Definizione 12.6 Sia $\mathcal{C}$ una conica reale non degenere.
Se $\mathcal{C}$ è vuota, essa prende il nome di *ellisse immaginaria*.
Se $\mathcal{C}$ non è vuota, allora:
$\mathcal{C}$ si dice *ellisse* se la retta impopria i_∞ è esterna a $\mathcal{C}$.
$\mathcal{C}$ si dice *iperbole* se la retta impopria i_∞ è secante $\mathcal{C}$.
$\mathcal{C}$ si dice *parabola* se la retta impopria i_∞ è tangente a $\mathcal{C}$.

Nel caso $n = 3$ si introducono le seguenti definizioni:

Definizione 12.7 Una quadrica reale vuota si dice *ellissoide immaginario.*

Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica reale non degenere, non vuota.
$\mathcal{Q}$ si dice *ellissoide* se la conica all'infinito $\mathcal{C}_\infty$ è vuota.
$\mathcal{Q}$ si dice *iperboloide* se la conica $\mathcal{C}_\infty$ è non degenere e non vuota.
$\mathcal{Q}$ si dice *paraboloide* se la conica $\mathcal{C}_\infty$ è degenere.

Un iperboloide si dice *iperboloide ellittico*, risp. *iperboloide iperbolico* se è una quadrica ellittica, risp. iperbolica.

Analogamente, un paraboloide si dice *paraboloide ellittico*, risp. *paraboloide iperbolico* se è una quadrica ellittica, risp. iperbolica.

Osservazione 12.8 Si osservi che ogni ellissoide è una quadrica ellittica. Infatti, essa non può contenere rette in quanto ogni retta (propria o impropria) di $S(\mathcal{A})$ contiene sempre almeno un punto improprio.

Con questa terminologia, si ottengono le seguenti caratterizzazioni delle coniche e quadriche non a centro, la cui dimostrazione è immediata:

Proposizione 12.9 *1) Se $\mathcal{C}$ è una conica reale non degenere, non vuota, allora $\mathcal{C}$ non è a centro se e solo se è una parabola.*

2) Se $\mathcal{Q}$ è una quadrica reale non degenere, non vuota, $\mathcal{Q}$ non è a centro se e solo se è un paraboloide.

Inoltre, nei casi 1) e 2), il centro è l'unico punto improprio di $\mathcal{C}$, ovvero è il punto singolare della conica all'infinito $\mathcal{C}_\infty$.

Per determinare il centro di una conica o di una quadrica affine non degenere, senza ricorrere alla definizione, si può procedere come segue.

Ciò premesso, torniamo a considerare un'iperquadrica non degenere. Per determinare il centro si può osservare che:

- nel caso di una iperquadrica non a centro (ad es. una parabola o un paraboloide), le coordinate omogenee del centro $C_\infty(u, 0)$ si possono determinare individuando una soluzione non banale $u \in \mathbb{K}^n$ del sistema omogeneo $Bx = 0$.

Ciò perchè C_∞ è l'unico punto singolare di $\mathcal{Q}_\infty$.

-nel caso di una iperquadrica a centro (ad es. ellisse, iperbole, o ellissoide, iperboloide) risulta che il centro è il punto di coordinate $C(u, 1)$, dove il vettore u delle coordinate affini di C è l'unica soluzione del sistema lineare:

$$Bx = -\beta. \tag{17}$$

Ciò può verificarsi direttamente, calcolando un'equazione dell'iperpiano polare di $C(u, 1)$, usando la (11).

Un'altra giustificazione risiede nel teorema di reciprocità: il centro appartiene agli iperpiani $\pi_{X^i_\infty}$ polari delle direzioni X^i_∞ degli assi del riferimento ($i = 1, \dots, n$). Sappiamo che $r(B) = r(\mathcal{Q}_\infty) = n$, il che garantisce che il sistema (17) che descrive l'intersezione di tali iperpiani è un sistema di Cramer.

Ad esempio, se $\mathcal{C}$ è una conica (risp. quadrica) a centro, C si ottiene come punto di intersezione delle rette p_{X_∞} e p_{Y_∞} (ovvero dei piani π_{X_∞}, π_{Y_∞} e π_{Z_∞}). Si tratta di risolvere un sistema lineare che coinvolge le prime due (risp. tre righe) della matrice (15) della conica (risp. quadrica).

Il seguente risultato fornisce un metodo standard per classificare una conica affine:

Teorema 12.10 *Sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere, non vuota di un piano affine reale, di equazione*

$$\mathcal{C} : q(x) = 0,$$

in un sistema coordinato dedotto da un riferimento affine $\mathcal{R}$, dove q è associata alla matrice A nella (15). *Allora:*

$$\mathcal{C} \text{ è ellisse} \iff \det(B) > 0$$

$$\mathcal{C} \text{ è iperbole} \iff \det(B) < 0$$

$$\mathcal{C} \text{ è parabola} \iff \det(B) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE: I tre casi corrispondono per definizione alle possibili posizione reciproche tra la conica e la retta impropria $i_\infty = [X_\infty, Y_\infty]$, che si distinguono mediante il $\det(B)$ in forza della Proposizione 6.7, in quanto $k_{\mathcal{R}}(X_\infty) = [1, 0, 0]$ e $k_{\mathcal{R}}(Y_\infty) = [0, 1, 0]$. Si ricordi ancora che a priori è $B \neq 0$ in quanto $i_\infty \not\subset \mathcal{C}$. $\square$

Al lettore probabilmente è già noto che le iperquadriche si possono anche definire direttamente nell'ambito della geometria affine, come luoghi di punti determinati da un'equazione di secondo grado nelle coordinate affini. Concludiamo questo paragrafo esaminando qual è la relazione tra questo approccio e quello adottato qui, basato sulla geometria proiettiva. Cominciamo con il richiamare la seguente:

Definizione 12.11 Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine di dimensione n su $\mathbb{K}$. Si fissi un riferimento affine $\mathcal{R} = (O, \mathfrak{B})$. Dato un polinomio di secondo grado $p = p(x)$ nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$, esso determina il luogo geometrico:

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{R},p} : p(x) = 0,$$

definito come l'insieme di tutti e soli i punti di P di $\mathcal{A}$ la cui n-pla di coordinate affini $x = (x_1, \ldots, x_n)$ soddisfa la condizione

$$p(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Questa equazione si può riscrivere nella forma:

$$(p \circ x_{\mathcal{R}})(P) = 0 \tag{18}$$

dove $x_{\mathcal{R}} : \mathcal{A} \to \mathbb{K}^n$ è la bigezione che associa ad ogni punto $P \in \mathcal{A}$ la n-pla delle sue coordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$ rispetto al riferimento $\mathcal{R}$ ed il polinomio p è considerato come la corrispondente funzione polinomiale $p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$.

Analizzando come cambia l'equazione (18) effettuando un cambiamento di riferimento affine, e ricordando che per ogni riferimento affine la corrispondente bigezione $x_{\mathcal{R}}$ è una trasformazione affine, si arriva a formulare la seguente definizione, analoga alla Def. 2.3:

Definizione 12.12 Un'*iperquadrica* dello spazio affine n-dimensionale $\mathcal{A}$ sul campo $\mathbb{K}$ è una classe di equivalenza $[\mathcal{R}, p]$ rispetto alla relazione:

$$(\mathcal{R}, p) \sim (\mathcal{R}', p') \iff \exists f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) \text{ t.c. } x_{\mathcal{R}'} = f \circ x_{\mathcal{R}}, \quad p' = \lambda\,(p \circ f^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{K}^*. \tag{19}$$

Come nel caso proiettivo, se $\mathcal{Q} = [\mathcal{R}, p]$, si dice che $\mathcal{Q}$ ha equazione

$$\mathcal{Q} : p(x) = 0$$

nel riferimento affine $\mathcal{R}$ e si chiama *supporto* di $\mathcal{Q}$ il luogo geometrico $\mathcal{Q}_{\mathcal{R},p}$. Esso è univocamente determinato da $\mathcal{Q}$ e si denoterà ancora con $\mathrm{Supp}(\mathcal{Q})$ oppure con lo stesso simbolo $\mathcal{Q}$.

Data un'iperquadrica $\mathcal{Q}$ e un riferimento affine qualsiasi $\mathcal{R}_o$, essa può sempre rappresentarsi nella forma $\mathcal{Q} = [\mathcal{R}_o, p_o]$, per qualche polinomio p_o; quest'ultimo è univocamente determinato a meno di sostituire p_o con λp_o, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Si osservi che il polinomio p può scriversi univocamente nella forma:

$$p(x) = q_o(x) + 2\varphi(x) + \gamma, \tag{20}$$

dove $\gamma \in \mathbb{K}$, mentre q_o e φ sono polinomi *omogenei* di secondo e di primo grado nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$; eventualmente può essere $\varphi = 0$. Dunque q_o è una forma quadratica non nulla, mentre $\varphi : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ è un funzionale lineare. Essi si esplicitano come segue:

$$q_o(x) = {}^t xBx, \ \varphi(x) = {}^t\beta x$$

essendo B e ${}^t\beta$ le matrici di q_o e φ rispettivamente nella basa canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$ e rispetto alla stessa base e alla base canonica di $\mathbb{K}$.

In definitiva, ogni iperquadrica affine ha equazione del tipo:

$$\mathcal{Q} : \ {}^t xBx + 2\,{}^t\beta x + \gamma = 0 \tag{21}$$

con B matrice simmetrica *non nulla* di ordine n, $\beta \in \mathbb{K}^n$ e $\gamma \in \mathbb{K}$.

Vediamo ora come ogni iperquadrica di $\mathcal{A}$ determini canonicamente un'iperquadrica affine di $S(\mathcal{A})$, la cui parte affine coincide con essa.

Definizione 12.13 Sia $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica di $\mathcal{A}$, di equazione

$$\mathcal{Q} : {}^t xBx + 2{}^t\beta x + \gamma = 0$$

in un fissato riferimento affine $\mathcal{R}$. Si chiama *chiusura proiettiva* di $\mathcal{Q}$ l'iperquadrica $\overline{\mathcal{Q}}$ di $S(\mathcal{A})$ di equazione

$$\overline{\mathcal{Q}} : q(x) = 0$$

nel sistema coordinato $k_{\mathcal{R}}$, dove q è la forma quadratica su $\mathbb{K}^{n+1}$ associata, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A := \begin{pmatrix} B & \beta \\ {}^t\beta & \gamma \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Più sinteticamente, se $\mathcal{Q} = [\mathcal{R}, p]$, allora per definizione $\overline{\mathcal{Q}} = [k_{\mathcal{R}}, q_p]$ dove q_p e p sono correlati attraverso la matrice (22), che è della forma già presa in considerazione in precedenza.

Si noti anche che la forma quadratica q_p si scrive esplicitamente:

$$q_p(x,t) = {}^t xBx + 2{}^t\beta xt + \gamma t^2.$$

Dunque q_p, pensata come un polinomio omogeneo nelle coordinate $x_1, \ldots, x_n, t$, coincide con l'omogeneizzato del polinomio $p(x)$. Abbiamo infatti:

$$q_p(x,t) = ({}^t x \ \ t) \begin{pmatrix} B & \beta \\ {}^t\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = ({}^t xB + t{}^t\beta \quad {}^t x\beta + \gamma t) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = {}^t xBx + 2{}^t\beta xt + \gamma t^2.$$

Osservazione 12.14 L'iperquadrica $\overline{\mathcal{Q}}$ è univocamente determinata da $\mathcal{Q}$, cioè la sua definizione non dipende dalla scelta della coppia $(\mathcal{R}, p)$ che rappresenta $\mathcal{Q}$. Ai fini di verificare ciò, supponiamo $\mathcal{Q} = [\mathcal{R}, p] = [\mathcal{R}', p']$; dunque sussistono le (19); pertanto si ha

$$p' = \lambda p \circ f^{-1}, \tag{23}$$

essendo $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un'affinità, che opera esplicitamente come segue:

$$f(x) = Ex + b, \quad E \in GL(n, \mathbb{K}),\ b \in \mathbb{K}^n,$$

e tra i vettori x e x' delle coordinate affini di uno stesso punto $P \in \mathcal{A}$ nei due riferimenti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ sussiste la relazione:

$$x' = Ex + b.$$

Da ciò si trae facilmente che tra i sistemi coordinati $k_{\mathcal{R}}$ e $k_{\mathcal{R}'}$ dedotti dai due riferimenti affini sussiste la relazione:

$$k_{\mathcal{R}'} = \omega_L \circ k_{\mathcal{R}}$$

dove $L : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ è l'automorfismo definito da:

$$L(x, t) = (Ex + tb, t).$$

Ora, affermiamo che da (23) si ricava che

$$q_{p'} \circ L = \lambda q_p,$$

da cui segue $[k_{\mathcal{R}}, q_p] = [k'_{\mathcal{R}}, q_{p'}]$, che è quanto occorre verificare. Infatti, assumendo λp della forma:

$$\lambda p = q_o + 2\varphi + \gamma$$

abbiamo, applicando la (23):

$$p'(x) = q_o(E^{-1}(x - b)) + 2\varphi(E^{-1}(x - b)) + \gamma;$$

ai fini di isolare la parte quadratica, quella lineare e il termine costante di tale polinomio, consideriamo la forma bilineare $b_o := b_{q_o}$ associata a q_o; possiamo riscrivere allora:

$$p'(x) = q_o(E^{-1}x) - 2b_o(E^{-1}x, E^{-1}b) + q_o(E^{-1}b) + 2\varphi(E^{-1}x) - 2\varphi(b) + \gamma.$$

Dunque

$$p'(x) = q'_o(x) + 2\varphi'(x) + \gamma'$$

dove

$$q_o'(x) := q_o(E^{-1}x),\ \varphi'(x) = \varphi(E^{-1}x) - b_o(E^{-1}x, E^{-1}b),\ \gamma' := \gamma + q_o(E^{-1}b) - 2\varphi(b).$$

Ricordando che $q_{p'}$ è l'omogeneizzato di p', segue che:

$$q_{p'}(L(x,t)) = q_o'(Ex+tb) + 2\varphi'(Ex+tb)t + \gamma' t^2,$$

che si riscrive:

$$q_{p'}(L(x,t)) = q_o(x+tE^{-1}b)+2(\varphi(x+tE^{-1}b)-b_o(x+tE^{-1}b, E^{-1}b))\,t+(\gamma+q_o(E^{-1}b)-2\varphi(b))\,t^2$$

e, quindi, sviluppando il secondo membro:

$$q_{p'}(L(x,t)) = q_o(x) + 2\varphi(x)t + \gamma t^2$$

ovvero

$$(q_{p'} \circ L)(x,t) = q_{\lambda p}(x,t) = \lambda q_p(x,t)$$

come volevasi.

La relazione geometrica che intercorre tra un'iperquadrica di $\mathcal{A}$ e la sua chiusura proiettiva è chiarita dalla proprietà seguente:

Proposizione 12.15 *Considerate un'iperquadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{A}$, il supporto di $\mathcal{Q}$ coincide con la parte affine della sua chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{Q}}$.*

Dimostrazione: Dato infatti un punto proprio $P(x_1, \ldots, x_n)$, allora $k_R(P) = [x,1]$, dove $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Pertanto P appartiene $\overline{\mathcal{Q}}$ se e solo se $q_p(x,1) = 0$ che può riscriversi $p(x) = 0$. $\square$

Infine, il risultato seguente stabilisce che le due nozioni di iperquadrica affine che abbiamo introdotto fin qui sono equivalenti:

Teorema 12.16 *Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine di dimensione n. Vi è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle iperquadriche di $\mathcal{A}$ e l'insieme delle iperquadriche di $S(\mathcal{A})$ non contenenti l'iperpiano all'infinito π_∞. Essa è data da*

$$\mathcal{Q} \mapsto \overline{\mathcal{Q}}.$$

DIMOSTRAZIONE: Fissiamo un riferimento affine $\mathcal{R}$. Riguardo l'ingettività dell'applicazione in esame, date due iperquadriche $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ di $\mathcal{A}$, assumendo che rispetto a $\mathcal{R}$ si abbia:

$$\mathcal{Q} :\ {}^t\!xBx + 2{}^t\!\beta x + \gamma = 0$$

e

$$\mathcal{Q}' :\ {}^t\!xB'x + 2{}^t\!\beta' x + \gamma' = 0,$$

se $\overline{\mathcal{Q}} = \overline{\mathcal{Q}}'$, allora in base alla definizione di iperquadrica proiettiva, le corrispondenti matrici A e A' costruite in accordo con la (22) devono essere proporzionali (cf. Prop. 2.8). Pertanto esiste $\lambda \neq 0$, tale che

$$B' = \lambda B, \beta' = \lambda\beta,\ \gamma' = \lambda\gamma$$

il che garantisce $p' = \lambda p$ e quindi $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}'$.

Riguardo la surgettività, assegnata un'iperquadrica $\mathcal{Q}_o$ di $S(\mathcal{A})$ non contenente π_∞ e di equazione $\mathcal{Q}_o : q(x,t) = 0$ in $k_\mathcal{R}$, denotata sempre con A la matrice associata a q, che scriviamo sempre nella forma (15), sappiamo che $B \neq 0$, e quindi ha senso considerare l'iperquadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{A}$ di equazione (21). È evidente per costruzione che $\overline{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}_o$. □

Nel seguito $\mathcal{Q}$ e $\overline{\mathcal{Q}}$ saranno di norma denotate con lo stesso simbolo, e ci si riferirà all'una o all'altra indifferentemente come *iperquadrica affine* o *iperquadrica dello spazio affine* $\mathcal{A}$ e ci si riferirà alla matrice (15) chiamandola semplicemente *matrice di* $\mathcal{Q}$ *rispetto al riferimento* $\mathcal{R}$.

13 Iperpiani diametrali

Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine reale di dimensione $n \geq 2$.

Proposizione 13.1 *Se $\mathcal{Q}$ è una iperquadrica non degenere di $S(\mathcal{A})$, un iperpiano α passa per il centro C di $\mathcal{Q}$ se e solo il suo polo è un punto improprio.*

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di applicare il teorema di reciprocità: denotato con D il polo di α, per definizione di centro abbiamo infatti:

$$C \in \alpha \iff D \in \pi_C \iff D \in \pi_\infty.$$

□

Definizione 13.2 Si chiama *ierpiano diametriale* di un'iperquadrica non degenere $\mathcal{Q}$ ogni iperpiano α diverso da π_∞ passante per il centro di $\mathcal{Q}$.

Dunque gli iperpiani diametrali sono tutti e soli gli iperpiani polari delle direzioni, fatta al più eccezione per il centro (se questo è improprio). Ciò porta a dare la seguente:

Definizione 13.3 Il polo di un iperpiano diametrale si chiama *direzione coniugata* ad esso.

Nel caso di una conica ovviamente si parla di *diametro*, mentre nel caso della quadriche si parla di *piano diametrale.*

Si osservi che la direzione coniugata ad un diametro d non va confusa con la sua direzione: se D_∞ è la direzione di d, e D'_∞ e la direzione coniugata, allora tali punti sono caratterizzati da

$$D_\infty \in d, \; p_{D'_\infty} = d.$$

Generalmente, tali direzioni sono distinte. Si osservi anzi che, più in generale, nel caso di un'iperquadrica, un iperpiano α passa per la propria direzione coniugata se e solo è tangente all'iperquadrica stessa.

Definizione 13.4 Nel caso di una conica a centro $\mathcal{C}$ con centro C, due diametri si diranno *coniugati* se sono rette coniugate rispetto alla conica; equivalentemente, se essi si corrispondono nell'involuzione $\omega_C : \mathfrak{F}(C) \to \mathfrak{F}(C)$ delle rette coniugate sul fascio di centro C. Quest'ultima prende il nome di *involuzione dei diametri coniugati.*

Proposizione 13.5 *Sia $\mathcal{C}$ una conica non vuota, a centro, con centro C. Allora*

$$\mathcal{C} \text{ è ellisse } \iff \omega_C \text{ è ellittica } \iff C \text{ è un punto interno a } \mathcal{C}.$$

$$\mathcal{C} \text{ è iperbole } \iff \omega_C \text{ è iperbolica } \iff C \text{ è un punto esterno a } \mathcal{C}.$$

DIMOSTRAZIONE: Tenendo conto della definizione di ellisse ed iperbole, si tratta di applicare il Teorema 11.5 nel caso in esame, tenendo conto del fatto che la polare del punto C è i_∞. □

Dunque solo nel caso dell'iperbole ha senso la seguente:

Definizione 13.6 Si chiamano *asintoti* di un'iperbole le tangenti condotte ad esse dal centro.

Si osservi che gli asintoti t_1 e t_2 di un'iperbole sono le rette $[C, T^1_\infty]$ e $[C, T^2_\infty]$, dove T^1_∞ e T^2_∞ sono i punti impropri appartenenti ad essa. Si possono anche caratterizzare come le polari $p_{T^1_\infty}$ e $p_{T^2_\infty}$, ovvero come le tangenti all'iperbole nei suoi due punti impropri.

Se d e t sono diametri, allora essi sono coniugati se e solo se lo sono le direzioni coniugate D'_∞ e T'_∞ (cfr. Osservazione 11.4). In realtà, tale condizione si può riformulare anche più convenientemente coinvolgendo le direzioni di d e t:

Proposizione 13.7 *Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro. Siano d e t due diametri, aventi direzioni rispettivamente D_∞ e T_∞. Allora d e t sono coniugati se e solo se D_∞ e T_∞ sono punti coniugati.*

Dimostrazione: È un'applicazione del Corollario 11.6; infatti, in tal caso la polare di C è i_∞ e, per ogni diametro, la sua intersezione con i_∞ è la corrispondente direzione. □

Sfruttando la Proposizione 13.7, possiamo ricavare un'equazione canonica per l'involuzione dei diametri coniugati.

Proposizione 13.8 *Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro. Sia $A = (a_{ij})$ la matrice di $\mathcal{C}$ relativa ad un fissato riferimento $k_\mathcal{R}$.*

Fissato un sistema coordinato sul fascio $\mathfrak{F}(C)$ rispetto al quale l'ascissa proiettiva è il coefficiente angolare, l'involuzione dei diametri coniugati ω_C ha equazione bilineare:

$$a_{22}mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0. \tag{24}$$

Dimostrazione: Dati due diametri d e t con coefficienti angolari m e m' rispettivamente, e quindi aventi direzioni $D_\infty(1, m, 0)$ e $D'_\infty(1, m', 0)$, abbiamo che d e t sono coniugati se e solo se

$$(1\ m\ 0)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ m' \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

che si esplicita fornendo l'equazione (24). □

Come sappiamo (Teorema 11.5), gli asintoti sono i punti uniti dell'involuzione dei diametri coniugati. Utilizzando il procedimento generale per la ricerca dei punti uniti di una proiettività di una retta geometrica proiettiva, i rispettivi coefficienti angolari si ottengono imponendo nella (24) $m' = m$ e occorre distinguere due casi:

-$a_{22} \neq 0$: l'equazione in questione è di secondo grado; tenendo conto del fatto che $\mathcal{C}$ è un'iperbole, e quindi

$$a_{11}a_{22} - a_{12} < 0,$$

essa ammette due soluzioni reali e distinte che sono i coefficienti angolari degli asintoti, nessuno dei quali è parallelo all'asse delle ordinate.

-$a_{22} = 0$: uno degli asintoti è la retta $[C, Y_\infty]$, parallela all'asse delle ordinate, corrispondente al punto unito dell'involuzione avente ascissa proiettiva ∞. L'altro è la retta per C di coefficiente angolare $m = -\frac{a_{11}}{2a_{12}}$ che si ottiene ponendo $m = m'$ nella (24).

14 La nozione di equivalenza affine tra iperquadriche

Nel contesto dell'estensione proiettiva di uno spazio affine, l'iperpiano all'infinito ha un ruolo privilegiato. È naturale quindi sostituire la nozione di equivalenza proiettiva con la seguente condizione più stringente, che tiene conto dell'ambiente in cui le iperquadriche sono immerse:

Definizione 14.1 Due iperquadriche affini $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ di $S(\mathcal{A})$ si diranno *affinemente equivalenti* se esiste una trasformazione proiettiva $\omega : S(\mathcal{A}) \to S(\mathcal{A})$ tale che

$$\omega(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}', \quad \omega(\pi_\infty) = \pi_\infty.$$

In tal caso, le iperquadriche sono "sovrapponibili" in modo che la parte affine e la parte all'infinito vengano preservate.

Ricordiamo che ogni affinità $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ si estende canonicamente ad una trasformazione proiettiva

$$\omega_f : S(\mathcal{A}) \to S(\mathcal{A})$$

la cui restrizione a $\pi_\infty = \mathbb{P}(V)$ è la proiettività

$$\omega_L : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$$

determinata dall'isomorfismo L associato a f. Denotato con $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ il gruppo delle affinità di $\mathcal{A}$, sappiamo che l'applicazione

$$\Phi : f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A}) \mapsto \omega_f \in Pro(S(\mathcal{A}))$$

è un omomorfismo ingettivo la cui immagine è il sottogruppo di $Pro(S(\mathcal{A}))$ costituito da tutte e sole le proiettività $\omega : S \to S$ che mutano in sè l'iperpiano all'infinito, ovvero $\omega(\pi_\infty) = \pi_\infty$.

Peranto, due iperquadriche affini $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono affinemente equivalenti se e solo se esiste un'affinità $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tale che $\omega_f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$.

Naturalmente il concetto appena introdotto ammette una formulazione simile se si considerano iperquadriche di uno spzio affine $\mathcal{A}$, a prescindere dall'inclusione di $\mathcal{A}$ in $S(\mathcal{A})$; essa è basata sulla nozione di immagine di un'iperquadrica mediante un'affinità, secondo la seguente:

Definizione 14.2 Sia $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ un'affinità con isomorfismo associato $L : V \to V$. Si definisce *immagine* di un'iperquadrica affine $\mathcal{Q} = [\mathcal{R}, p]$ mediante f l'iperquadrica

$$f(\mathcal{Q}) := [\mathcal{R}', p],$$

dove, posto $\mathcal{R} = (O, \mathfrak{B})$, $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{R}'$ denota il riferimento $(f(O), \mathfrak{B}')$, con $\mathfrak{B}' = \{Lv_1, \dots, Lv_n\}$.

Analogamente al caso proiettivo, risulta:

$$f(\mathrm{Supp}(\mathcal{Q})) = \mathrm{Supp}(f(\mathcal{Q})).$$

Infatti, si osservi che per ogni punto P di $\mathcal{A}$, P e $f(P)$ hanno le stesse coordinate nei riferimenti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ rispettivamente.

Definizione 14.3 Due iperquadriche $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ di $\mathcal{A}$ si dicono *equivalenti* se esiste un'affinità $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tale che $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$.

Verifichiamo ora che la corrispondenza biunivoca $\mathcal{Q} \mapsto \overline{\mathcal{Q}}$ che associa ad ogni iperquadrica di uno spazio affine la corrispondente chiusura proiettiva rispetta le due nozioni di equivalenza appena discusse.

Proposizione 14.4 *Se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ è un'affinità, per ogni iperquadrica di $\mathcal{A}$ si ha:*

$$\overline{f(\mathcal{Q})} = \omega_f(\overline{\mathcal{Q}}).$$

DIMOSTRAZIONE: Posto $\mathcal{Q} = [\mathcal{R}, p]$, abbiamo $\overline{\mathcal{Q}} = [k_{\mathcal{R}}, q_p]$. D'altra parte, mantenendo le notazioni della Def. 14.2, è $f(\mathcal{Q}) = [\mathcal{R}', p]$. Come abbiamo già osservato precedentemente, per ogni punto proprio P, P e $f(P)$ hanno le stesse coordinate rispetto a $\mathcal{R}$ e a $\mathcal{R}'$ rispettivamente. Analogamente, per ogni vettore $v \in V$, le componenti di v e di $L(v)$ nelle basi $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ sono le stesse. Da ciò segue immediatamente che tra i sistemi coordinati dedotti dai due riferimenti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ sussiste la seguente relazione:

$$k_{\mathcal{R}} = k_{\mathcal{R}'} \circ \omega_f.$$

Ne consegue che (ricordando la Def. 4.1):

$$\omega_f(\overline{\mathcal{Q}}) = [k_{\mathcal{R}} \circ \omega_f^{-1}, q_p] = [k_{\mathcal{R}'}, q_p] = \overline{f(Q)}.$$

$\square$

Corollario 14.5 *Date due iperquadriche $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ di uno spazio affine $\mathcal{A}$, si ha che $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono affinemente equivalenti se e solo se tali sono le rispettive chiusure proiettive $\overline{\mathcal{Q}}$ e $\overline{\mathcal{Q}'}$.*

15 La classificazione affine delle iperquadriche

Per risolvere il problema dell'equivalenza affine tra iperquadriche, cominciamo con lo studiare il problema analogo nel contesto di uno spazio proiettivo in cui si fissi un iperpiano α, e si consideri il gruppo delle trasformazioni proiettive che lasciano invariato α.

Per semplicità, ci limiteremo a trattare il caso reale. Quindi S denoterà sempre uno spazio geometrico proiettivo reale di dimensione $n \geq 2$.

Lemma 15.1 *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 2. Se $q \in Q(V)$ è non degenere e q ammette un vettore isotropo non nullo v, esiste un vettore isotropo w linearmente indipendente da esso e tale che la matrice di q rispetto alla base $\{v, w\}$ è*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare, la segnatura di q è $(1, 1)$.

Dimostrazione: Posto $b = b_q$, si fissi un vettore $u \neq 0$ tale che $b(v, u) \neq 0$ (esiste perchè q è non degenere). In particolare u e v sono linearmente indipendenti. Se u è isotropo, è sufficiente considerare il vettore $w := \frac{1}{b(v,u)}u$. Se u non è isotropo, abbiamo che l'equazione

$$q(\lambda v + u) = 0$$

ammette la radice non nulla $\lambda_0 = -\frac{q(u)}{2b(u,v)}$. Posto $w_0 := \lambda_0 v + u$, tale vettore è isotropo e $\{v, w_o\}$ è ancora una base di V. Ovviamente $b(v, w_0) \neq 0$. Allora il vettore $w := \frac{1}{b(v,w_0)}w_0$ ha i requisiti richiesti. $\square$

Teorema 15.2 *Sia V uno spazio vettoriale reale di di dimensione $n+1$, $n \geq 1$ e sia W un sottospazio di dimensione n.*

a) Siano q una forma quadratica su V uno spazio vettoriale reale e q' la restrizione di q a W, e si denotino con r e (p, q) il rango e la segnatura di q'. Supponiamo che $q' \neq 0$.

Allora esiste una base $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ di V tale che

$$W =< e_1, \ldots, e_n >$$

e rispetto alla quale la matrice di q è una matrice diagonale a blocchi di una delle seguenti forme:

$$I) \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n+1-r} \end{pmatrix} \qquad II) \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$III) \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad IV) \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Siano q_1 e q_2 due forme quadratiche su V che non si annullano su W. Allora esiste un automorfismo $L : V \to V$ tale che

$$L(W) = W \ \ e \ \ q_2 = \lambda q_1 \circ L, \quad dove\ \lambda \in \mathbb{R}^*$$

se e solo se q_1 e q_2 hanno lo stesso rango e lo stesso indice e lo stesso vale per le restrizioni $q_1|_W$ e $q_2|_W$.

Dimostrazione: a) Distinguiamo i due casi seguenti:

1) $W^\perp \not\subset W$

2) $W^\perp \subset W$.

1) In tal caso, scelto un vettore $v \in W^\perp$ non appartenente a W, abbiamo

$$V = W \oplus < v >$$

e quindi utilizzando una base diagonalizzante di Sylvester $\{e_1, \ldots, e_n\}$ per q', possiamo costruire una base diagonalizzante $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_n, v\}$ per q, di modo che $W =< e_1, \ldots, e_n >$ ed inoltre la matrice di q è di uno dei primi tre tipi nell'enunciato.

2) In questo caso il radicale di $q|_W$ coincide con $W^\perp$. Fissiamo un sottospazio U di W tale che:

$$W = U \oplus W^\perp.$$

Allora la restrizione di q ad U è non degenere e ha ancora segnatura (p, q) (cf. Proposizione 1.6). In particolare:

$$V = U \oplus U^{\perp}.$$

Inoltre, essendo $U \subset W$ si ha $W^{\perp} \subset U^{\perp}$; fissiamo dunque un sottospazio E di $U^{\perp}$ tale che

$$U^{\perp} = W^{\perp} \oplus E.$$

Otteniamo così la seguente decomposizione di V:

$$V = U \oplus W^{\perp} \oplus E.$$

Ovviamente E ha dimensione 1. Fissato un vettore non nullo $e \in E$, denotiamo con S il seguente sottospazio di $W^{\perp}$

$$S := Ker(b_e|_{W^{\perp}}).$$

Notiamo che il funzionale $b_e|_{W^{\perp}}$ non è nullo, perchè altrimenti il vettore e sarebbe ortogonale anche a W e quindi dovrebbe appartenere a $W^{\perp}$, il che è una contraddizione. Pertanto S è un iperspazio di $W^{\perp}$; denotato con u un vettore di $W^{\perp}$ non appartenente a S, abbiamo l'ulteriore decomposizione di V:

$$V = U \oplus S \oplus F$$

dove si è posto

$$F = < u, e > .$$

Si osservi che i sottospazi coinvolti sono a due a due ortogonali rispetto a b_q. Per costruzione, $b_q(u, e) \neq 0$ e siccome $q(u) = 0$, la restrizione di q al sottopazio F è non degenere ed il Lemma 15.1 è applicabile, fornendo una base $\{u, w\}$ di F rispetto alla quale la matrice di $q|_F$ è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Consideriamo quindi una base di V del tipo

$$\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_r, w_1, \ldots, w_{n-r-1}, u, w\}$$

dove $\{e_1, \ldots, e_r\}$ è un base diagonalizzante di Sylvester per la restrizione di q ad U ed i vettori w_i appartengono a $W^{\perp}$; la matrice di q rispetto a $\mathfrak{B}$ è del tipo IV).

b) La verifica che la condizione è necessaria si lascia al lettore. Si assuma che q_1 e q_2 abbiano stesso rango e stesso indice e così per le due restrizioni di q_1 e q_2 a W. Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 1.4. è sufficiente provare l'esistenza di due basi $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\mathfrak{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ di V tali che

$$M_{\mathfrak{B}}(\lambda q_1) = M_{\mathfrak{B}'}(q_2),$$

dove $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ed inoltre tali che

$$< e_1, \ldots, e_n >= W =< e'_1, \ldots, e'_n > . \qquad (25)$$

Infatti, denotato con $L : V \to V$ l'automorfismo lineare tale che

$$L(e'_i) = e_i$$

abbiamo $q_2 = \lambda q_1 \circ L$ e ovviamente $L(W) = W$.

Ai fini di determinare due basi con la proprietà richiesta, osserviamo innanzitutto che. per l'ipotesi fatta, a meno di sostituire q_1 con $-q_1$ e/o q_2 con $-q_2$, possiamo supporre che le restrizioni di q_1 e ϵq_2 a W abbiano la stessa segnatura (p, q) con $p \geq q$.

Consideriamo una base $\mathfrak{B}$ rispetto alla quale la matrice di q_1 è uno dei tipi I), II), III), IV) ed una base $\mathfrak{B}'$ con la stessa proprietà relativamente a q_2.

Allora in entrambe le matrici gli interi p e q, r coincidono. Si assuma inizialmente $p > q$. Tendendo conto dell'ipotesi su q_1 e q_2, calcolandone il rango e l'indice utilizzando le due matrici, si ricava facilmente che le matrici in questione devono essere dello stesso tipo e quindi uguali.

Resta da esaminare il caso $p = q$. Valutando ancora rango ed indice delle due forme quadratiche, vediamo che le matrici o sono entrambe dello stesso tipo, e quindi uguali, oppure una di tipo II) e l'altra di tipo III) o viceversa. Per fissare le idee, supponiamo

$$M_{\mathfrak{B}}(q_1) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; M_{\mathfrak{B}}(q_2) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo allora $-q_1$ in luogo di q_1; la corrispondente matrice è dunque

$$M_{\mathfrak{B}}(-q_1) = \begin{pmatrix} -I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando una permutazione dei primi n elementi della base $\mathfrak{B}$, otteniamo una nuova base rispetto alla quale il vincolo (25) è ancora soddisfatto e la matrice di $-q_1$ è

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cioè coincide con $M_{\mathfrak{B}'}(q_2)$ come volevasi. □

Applicando il risultato precedente alle iperquadriche, si ottiene quanto segue:

Teorema 15.3 *Siano $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ due iperquadriche non degeneri di uno spazio proiettivo reale e siano α e α' due iperpiani di S, tali che $\alpha \not\subset \mathcal{Q}$ e $\alpha' \not\subset \mathcal{Q}'$.*

Allora condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una trasformazione proiettiva $\omega : S \to S$ tale che:

$$\omega(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}' \text{ e } \omega(\alpha) = \alpha'$$

è che $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ siano proiettivamente equivalenti ed anche $\mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{Q}' \cap \alpha'$ siano proiettivamente equivalenti.

DIMOSTRAZIONE: Si lascia al lettore di verificare che la condizione è necessaria. Fissiamo due sistemi coordinati k e k' tali che

$$k(\alpha) = \mathbb{P}(W) = k'(\alpha')$$

dove $W \subset \mathbb{K}^{n+1}$ è lo stesso iperspazio, ad esempio $W =< e_1, \dots, e_n >$ dove $\{e_i\}$ è la base canonica. Supponiamo $\mathcal{Q} : q_1(x) = 0$ in k e $\mathcal{Q}' : q_2(x) = 0$ in k'. Per l'ipotesi fatta, q_1 e q_2 hanno lo stesso indice, mentre $q_1|_W$ e $q_2|_W$ hanno lo stesso rango e lo stesso indice. Pertanto per la Prop. 15.2 esistono un automorfismo L di $\mathbb{K}^{n+1}$ e $\lambda \neq 0$ tali che

$$q_2 = \lambda q_1 \circ L^{-1}, \ L^{-1}(W) = W.$$

Consideriamo allora la proiettività $\omega \in Pro(S)$ definita da:

$$\omega := k'^{-1} \circ \omega_L \circ k.$$

Abbiamo allora $\omega(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$ ed inoltre $\omega(\alpha) = \alpha'$ in quanto $L(W) = W$. □

La più importante applicazione del risultato precedente riguarda il caso in cui S è l'estensione proiettiva $S(\mathcal{A})$ di uno spazio affine e α è l'iperpiano all'infinito.

Ricordiamo che l'iperquadrica all'infinito $\mathcal{Q} \cap \pi_\infty$ di un'iperquadrica affine $\mathcal{Q}$ viene denotata con $\mathcal{Q}_\infty$.

Teorema 15.4 *Date due iperquadriche affini reali $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ risulta:*

$$\mathcal{Q} \text{ e } \mathcal{Q}' \textit{ sono affinemente equivalenti} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathcal{Q} \text{ e } \mathcal{Q}' \textit{ sono proiett. equivalenti} \\ \mathcal{Q}_\infty \text{ e } \mathcal{Q}'_\infty \textit{ sono proiett. equivalenti.} \end{cases}$$

Questo criterio afferma che l'equivalenza affine di due iperquadriche equivale alla loro equivalenza proiettiva unita alla circostanza che le due iperquadriche abbiano la medesima posizione reciproca con l'iperpiano all'infinito.

Conviene osservare esplicitamente che dal Teorema 15.4 segue che due coniche reali non degeneri sono affinemente equivalenti se e solo se hanno la stessa denominazione, cioè se e solo e sono entrambe ellissi immaginarie, oppure entrambe ellissi, entrambe iperboli o entrambe parabole.

Lo stesso dicasi per due quadriche non degeneri, dove si tenga conto della Def. 12.7.

Tornando al caso generale, applicando il criterio enunciato sopra, si perviene alla seguente classificazione esplicita:

Teorema 15.5 *Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine reale di dimensione $n \geq 2$. Ogni iperquadrica affine di $\mathcal{A}$ è affinemente equivalente ad una ed una sola delle iperquadriche seguenti, di cui si fornisce l'equazione nel sistema coordinato $k_{\mathcal{R}}$ di $S(\mathcal{A})$ dedotto da una fissato riferimento affine $\mathcal{R}$:*

$$\mathcal{Q}^0_{p,q} : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 0,\ p \geq q \geq 0,\ 1 \leq\ p+q \leq n$$
$$\mathcal{Q}^1_{p,q} : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 + t^2 = 0,\ p > q \geq 0,\ 1 \leq\ p+q \leq n$$
$$\mathcal{Q}^2_{p,q} : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 - t^2 = 0,\ p \geq q \geq 0,\ 1 \leq\ p+q \leq n$$
$$\mathcal{Q}^3_{p,q} : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 + 2x_n t = 0,\ p \geq q \geq 0,\ 1 \leq\ p+q \leq n-1.$$

DIMOSTRAZIONE: Utilizzando il criterio stabilito dal teorema precedente si verifica facilmente che le iperquadriche elencate sono a due a due non affinemente equivalenti. Infatti, denotata con $\mathcal{Q}$ una di esse, è chiaro che $r := r(\mathcal{Q}_\infty) = p + q$ e $i(\mathcal{Q}_\infty) = q$. Notiamo poi che, nel caso di $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^0_{p,q}$ si ha:

$$r(\mathcal{Q}) = r \text{ e } i(\mathcal{Q}) = q, \tag{26}$$

per $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^1_{p,q}$ abbiamo invece che

$$r(\mathcal{Q}) = r + 1 > 2q + 1 \text{ e } i(\mathcal{Q}) = q, \tag{27}$$

per $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^2_{p,q}$, $p > q$, abbiamo

$$r(\mathcal{Q}) = r + 1 \text{ e } i(\mathcal{Q}) = q + 1, \tag{28}$$

mentre se $p = q$:

$$r(\mathcal{Q}) = 2q + 1 \text{ e } i(\mathcal{Q}) = q. \tag{29}$$

Infine, se $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^3_{p,q}$, allora

$$r(\mathcal{Q}) = r + 2 \text{ e } i(\mathcal{Q}) = q + 1. \tag{30}$$

Dalle (26)-(30) vediamo quindi che, fissata una coppia (p, q) le iperquadriche $\mathcal{Q}^o_{p,q}$, $\mathcal{Q}^1_{p,q}$, $\mathcal{Q}^2_{p,q}$ e $\mathcal{Q}^3_{p,q}$ differiscono o per rango o per indice e di qui si conclude che esse sono tutte non equivalenti al variare di (p, q).

Assegnata poi una iperquadrica affine $\mathcal{Q} = [k_{\mathcal{R}}, q_o]$, utilizzando il Teorema 15.2, applicato alla forma quadratica q_o e al sottospazio W di $\mathbb{R}^{n+1}$ generato da $e_1, \dots, e_n$, e denotati con ancora con r e q il rango e l'indice di $\mathcal{Q}_\infty$, si ottiene che il rango e l'indice di $\mathcal{Q}$ dipendono sempre da r e q secondo una delle precedenti relazioni (26)-(30). Ciò si verifica subito esaminando le matrici di tipo I)-IV) nell'enunciato del Teorema 15.2, dove si può supporre, a meno di sostituire la forma quadratica q_o con l'opposta, che $p \geq q$. Pertanto, si ottiene che, nel caso (26), $\mathcal{Q}$ è affinemente equivalente a $\mathcal{Q}^0_{p,q}$, nel caso (27) $\mathcal{Q}$ è affinemente equivalente a $\mathcal{Q}^1_{p,q}$, e così via.

Alternativamente, si può utilizzare lo stesso teorema e le matrici di tipo I)-IV) per determinare un riferimento affine rispetto al quale l'equazione di $\mathcal{Q}$ è una di quelle nella lista dell'enunciato. $\square$

Corollario 15.6 *Ogni conica non degenere di un piano affine reale è affinemente equivalente ad una ed una sola della seguenti, di cui si dà l'equazione in un fissato riferimento affine:*

$\mathcal{C}_0 : x^2 + y^2 + 1 = 0$ (*ellisse immaginaria*)
$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$ (*ellisse*)
$\mathcal{C}_2 : x^2 - y^2 - 1 = 0$ (*iperbole*)
$\mathcal{C}_3 : x^2 + 2y = 0$ (*parabola*).

Infine, per le quadriche abbiamo il seguente risultato di classificazione:

Corollario 15.7 *Ogni quadrica non degenere di uno spazio affine reale di dimensione 3 è affinemente equivalente ad una ed una sola della seguenti, di cui si dà l'equazione in un fissato riferimento affine:*

$\mathcal{Q}_0 : x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ (*ellissoide immaginario*)
$\mathcal{Q}_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (*ellissoide*)
$\mathcal{Q}_2 : x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ (*iperboloide ellittico*)
$\mathcal{Q}_3 : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ (*iperboloide iperbolico*)
$\mathcal{Q}_4 : x^2 + y^2 + 2z = 0$ (*paraboloide ellittico*).
$\mathcal{Q}_5 : x^2 - y^2 + 2z = 0$ (*paraboloide iperbolico*).

16 Cenni sulle coniche e quadriche degeneri

In questo paragrafo completiamo l'esame della classificazione affine delle coniche e della quadriche reali, considerando il caso degenere, a completamento dei risultati di classificazione visti in precedenza (Corollari 15.6 e 15.7). Si tratta sempre di applicazioni del Teorema 15.5.

Teorema 16.1 *Ogni conica degenere di un piano affine reale è affinemente equivalente ad una ed una sola della seguenti, di cui si dà l'equazione in un fissato sistema coordinato di $S(\mathcal{A})$ dedotto da un riferimento affine:*

$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 0$ *(conica ellittica, ridotta ad un punto proprio)*
$\mathcal{C}_2 : x^2 - y^2 = 0$ *(conica iperbolica, unione di rette affini incidenti)*
$\mathcal{C}_3 : x^2 - t^2 = 0$ *(conica parabolica, unione di rette affini parallele)*
$\mathcal{C}_4 : x^2 + t^2 = 0$ *(conica parabolica, ridotta ad un punto improprio)*
$\mathcal{C}_5 : x^2 = 0$ *(conica doppiamente degenere, retta affine doppia).*

Si noti che per le coniche di rango 2 la terminologia è sempre coerente con la posizione reciproca con la retta impropria: i_∞ è esterna nel caso ellittico, secante nel caso iperbolico, e tangente nel caso parabolico.

Per quel che riguarda le quadriche degeneri, e più specificamente quelle di rango 3, si introducono le seguenti definizioni, che distinguono le varie tipologie di coni quadrici nel contesto affine. Si ricordi che (dal punto di vista proiettivo) un cono quadrico è una quadrica di rango 3 e indice 1.

Definizione 16.2 Un cono quadrico $\mathcal{Q}$ di uno spazio affine $\mathcal{A}$ di dimensione 3 si dice *cono propriamente detto* se il suo vertice $V \in S(\mathcal{A})$ è un punto proprio, altrimenti si dice *cilindro*.

Un cilindro si dice:
-*ellittico* se la conica $\mathcal{C}_\infty$ è ridotta ad un punto,
-*iperbolico* se la conica $\mathcal{C}_\infty$ è unione di rette,
-*parabolico* se la conica $\mathcal{C}_\infty$ è doppiamente degenere.

Si osservi che per un cono propriamente detto, la conica $\mathcal{C}_\infty$ è non degenere e non vuota (ciò è in accordo col teorema di struttura delle iperquadriche degeneri, Teorema 8.8, in quanto π_∞ non passa per il vertice). Invece per un cilindro, la conica all'infinito è necessariamente degenere, in quanto il vertice V appartiene ad essa ed è quindi un suo punto singolare (essendo punto singolare della quadrica). Ciò giustifica la definizione precedente.

Si noti anche che, nel caso affine, diversamente dalla classifcazione proiettiva, un cono *immaginario*, cioè una quadrica di rango 3 e indice 0, ridotto ad un punto *improprio* non è equivalente ad un cono immaginario ridotto ad un punto *proprio.*

Anche per le quadriche di rango 3 si verifica facilmente, in base al criterio di equivalenza, che esse sono affinemente equivalenti se e solo se hanno la stessa denominazione.

In definitiva, le varie classi di equivalenza di quadriche degeneri affini sono date dal risultato seguente:

Teorema 16.3 *Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine reale di dimensone 3. Ogni quadrica affine degenere $\mathcal{Q}$ è affinemente equivalente ad una ed una sola delle seguenti, di cui si dà l'equazione in un fissato sistema coordinato di $S(\mathcal{A})$ dedotto da un riferimento affine:*

$\mathcal{Q}_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 0$ *(cono immaginario, ridotto ad un punto proprio)*
$\mathcal{Q}_2 : x^2 + y^2 + t^2 = 0$ *(cono immaginario, ridotto ad un punto improprio)*
$\mathcal{Q}_3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ *(cono propriamente detto)*
$\mathcal{Q}_4 : x^2 + y^2 - t^2 = 0$ *(cilindro ellittico)*
$\mathcal{Q}_5 : x^2 - y^2 - t^2 = 0$ *(cilindro iperbolico)*
$\mathcal{Q}_6 : x^2 - 2zt = 0$ *(cilindro parabolico)*
$\mathcal{Q}_7 : x^2 + y^2 = 0$ *(retta doppia propria)*
$\mathcal{Q}_8 : x^2 + t^2 = 0$ *(retta doppia impropria)*
$\mathcal{Q}_9 : x^2 - y^2 = 0$ *(conoide, unione di piani affini incidenti)*
$\mathcal{Q}_{10} : x^2 - t^2 = 0$ *(conoide, unione di piani affini paralleli)*
$\mathcal{Q}_{11} : x^2 = 0$ *(piano affine doppio).*

Sempre in accordo con il criterio di classificazione affine, le varie classi si distinguono tenendo conto, oltre che del rango e dell'indice della quadrica, della natura della conica all'infinito $\mathcal{C}_\infty$. Per quel che riguarda le quadriche di rango 2, possiamo notare che $\mathcal{C}_\infty$ è ridotta ad un solo punto nel caso di una retta doppia propria (tale punto è la direzione della retta stessa), mentre $\mathcal{C}_\infty$ è doppiamente degenere se la quadrica è essa stessa una retta impropria. Così, se $\mathcal{Q}$ è unione di piani affini incidenti, $\mathcal{C}_\infty$ è unione di due rette (le rette improprie dei piani stessi), mentre se $\mathcal{Q}$ è unione di piani affini paralleli, $\mathcal{C}_\infty$ è doppiamente degenere (il suo supporto è la retta impropria comune ai due piani).

Si noti infine che dalla classificazione è esclusa la quadrica proiettiva di rango 1 costituita dal solo piano improprio, stante la definizione di quadrica affine, così come i conoidi che sono unione di un piano affine e del piano improprio.

17 Un metodo per classificare una quadrica reale

In questo paragrafo diamo dei suggerimenti utili per procedere alla classificazione di una quadrica reale $\mathcal{Q}$, di assegnata equazione in un sistema coordinato fissato.

Classificazione proiettiva:
Innanzitutto si osservi che una quadrica è vuota se e solo se la sequenza dei segni dei minori principali di $\mathcal{Q}$ è $++++$ oppure $-+-+$.

Nel caso di una quadrica *non vuota* e *non degenere*, si può distinguere tra la quadrica ellittica e quella iperbolica semplicemente valutando il segno del determinante della matrice A associata a q ($\det(A) < 0$ nel caso ellittico, $\det(A) > 0$ nel caso iperbolico).

Se la quadrica è degenere, si può procedere classificando le coniche $\mathcal{C}_i$ intersezione tra la quadrica e i quattro piani coordinati $\alpha_i : x_i = 0$, scartando i piani eventualmente contenuti nella quadrica; denotato con r il massimo dei ranghi di tali coniche, e considerata una conica $\mathcal{C}_i$ di rango r, le varie possibilità sono distinguibili osservando che:

r=3:
Se $\mathcal{C}_i$ è non vuota, $\mathcal{Q}$ è un cono quadrico, altrimenti è un cono immaginario.

r=2:
Se $\mathcal{C}_i$ è unione di rette, $\mathcal{Q}$ è unione di piani, altrimenti è una retta doppia.

r=1: $\mathcal{Q}$ è un piano doppio.

Classificazione affine: Nel caso non degenere, dopo aver stabilito se la quadrica è ellittica o iperbolica, è sufficiente classificare la conica $\mathcal{C}_\infty$ per stabilirne il tipo affine.

Nel caso degenere, si procede come sopra per ottenere la classificazione proiettiva della quadrica; tenendo conto del fatto che uno dei piani coordinati in questione è π_∞, il suo tipo affine è poi completamente determinato dalla natura di $\mathcal{C}_\infty$.

Conviene procedere classificando prima $\mathcal{C}_\infty$; nel caso in cui questa risulti non degenere, si può subito concludere che la quadrica è un cono propriamente detto ovvero un cono immaginario ridotto a un punto proprio, a seconda che $\mathcal{C}_\infty$ sia non vuota oppure vuota.

18 Proprietà metriche delle iperquadriche

In questo paragrafo studieremo le iperquadriche nel contesto degli spazi Euclidei. Denoteremo con E uno spazio Euclideo di dimensione $n \geq 2$, e faremo uso di riferimenti Cartesiani ortonormali per scrivere le equazioni delle iperquadriche.

Denoteremo con $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$, che è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard $<\,,\,>$. Useremo lo stesso simbolo per denotare la restrizione di tale prodotto scalare ad un qualsiasi sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nel contesto euclideo, siamo interessati a determinare gli iperpiani di simmetria ortogonale delle iperquadriche non degeneri. Cominciamo col discutere una familiare classe di iperquadriche che sono particolarmente ricche di simmetrie: le ipersfere.

Ricordiamo che assegnato un punto $C_o \in E$ ed un numero reale $R > 0$, si definisce la superficie sferica di centro C_o e raggio R come il luogo geometrico:

$$S(C_o, R) := \{P \in E : \ d(C_o, P) = R\},$$

dove $d : E \times E \to \mathbb{R}$ è la funzione distanza.

Tale luogo è il supporto di un'iperquadrica affine. Infatti, in un qualunque riferimento Cartesiano ortonormale $\mathcal{R}$ abbiamo che esso è descritto dall'equazione:

$$S(C_o, R) : (x_1 - x_0^1)^2 + \cdots + (x_n - x_0^n)^2 = R^2$$

dove $x_0^1, \ldots, x_0^n$ sono le coordinate di C_o, ovvero

$$S(C_o, R) : x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 2x_1x_o^1 - \cdots - 2x_nx_0^n + \gamma = 0 \qquad (31)$$

dove si è posto $\gamma := \sum(x_o^i)^2 - R^2$.

Tenendo conto di ciò, si introduce la seguente classe particolare di iperquadriche:

Definizione 18.1 Si chiama *ipersfera* ogni iperquadrica non degenere, non vuota $\mathcal{Q}$ di $S(E)$ per cui esiste un riferimento Cartesiano ortonormale $\mathcal{R}$ tale che $\mathcal{Q} = [k_R, q]$, dove la forma quadratica $q : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ soddisfa:

$$b_q|_{<e_1,\ldots,e_n>} = \lambda <,>, \quad \lambda \neq 0. \qquad (32)$$

Osservazione 18.2 Si noti che, assegnata un'iperquadrica non degenere, non vuota $\mathcal{Q}$, essa è un'ipersfera se e solo se *per ogni* riferimento Cartesiano ortonormale $\mathcal{R}$ sussiste la (32). Infatti, supponiamo che $\mathcal{Q} = [k_{\mathcal{R}}, q] = [k_{\mathcal{R}'}, q']$ dove $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ sono entrambi riferimenti Cartesiani ortonormali. Tra le coordinate cartesiane x e x' di un punto $P \in E$ rispetto ai due riferimenti, sussiste la relazione:

$$x' = Ax + b$$

dove $A \in O(n)$ e $b \in \mathbb{R}^n$. Da tale relazione consegue che:

$$k_{\mathcal{R}'} = \omega_L \circ k_{\mathcal{R}}$$

dove $L : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ è l'automorfismo definito da:

$$L(x,t) = (Ax + tb, t).$$

In particolare, la ridotta della restrizione di L al sottospazio $< e_1, \ldots, e_n >$ di $\mathbb{R}^{n+1}$ è una trasformazione ortogonale e tale è l'inversa L^{-1}. Ora, per definizione di iperquadrica, abbiamo che:

$$q' = \rho(q \circ L^{-1}),$$

per un opportuno scalare non nullo ρ. Assumiamo che sussista la (32). Allora per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$b_{q'}(e_i, e_j) = \rho b_q(L^{-1}e_i, L^{-1}e_j) = \rho\lambda < L^{-1}e_i, L^{-1}e_j >= \rho\lambda\delta^i_j$$

e quindi possiamo concludere che $b_{q'}|_{<e_1,\ldots,e_n>} = \rho\lambda <,>$.

Proposizione 18.3 *Si fissi un riferimento affine $\mathcal{R}$. Ogni ipersfera $\mathcal{Q}$ è affinemente equivalente all'iperquadrica di equazione affine in $\mathcal{R}$:*

$$\mathcal{S} : x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0.$$

Inoltre, essa è un'iperquadrica a centro, il cui supporto o equivalentemente la cui parte affine è una superficie sferica $S(C, R)$ dove C è il centro di $\mathcal{Q}$.

Dimostrazione: Consideriamo un riferimento Cartesiano ortonormale $\mathcal{R}_o$, rispetto al quale l'ipersfera sia rappresentata come $\mathcal{Q} = [k_{\mathcal{R}_o}, q]$ e q soddisfa (32). Allora la restrizione di b_q al sottospazio $U :=< e_1, \ldots, e_n >$ è non degenere e ha indice 0. In particolare, $\mathcal{Q}_\infty$ è vuota. Poichè q è non degenere, abbiamo che

$$\mathbb{R}^{n+1} = U \oplus U^\perp$$

e da qui si ricava subito che $i(q) = 0$ oppure $i(q) = 1$. La prima eventualità è da escludersi perchè $\mathcal{Q}$ è non vuota. Quindi $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{S}$ sono affinemente equivalenti in forza del criterio fornito dal Teorema 15.4.

Abbiamo che $\mathcal{Q}$ è a centro perchè $\mathcal{Q}_\infty$ è non degenere; ricordiamo inoltre che il vettore delle coordinate affini del centro C si ottengono risolvendo il sistema lineare

$$Bx = -\beta,$$

che nel caso in esame comporta che il centro è il punto $C(-\frac{1}{\lambda}\beta, 1)$. Ora, l'equazione di $\mathcal{Q}$ nelle coordinate cartesiane relative a $\mathcal{R}_o$ si può riscrivere, usando il prodotto scalare standard, come segue:

$$\lambda||x||^2 + 2 < \beta, x > +\gamma = 0$$

ovvero

$$||x||^2 + 2 < \frac{\beta}{\lambda} x > + \frac{1}{\lambda}\gamma = 0$$

o ancora

$$||x + \frac{1}{\lambda}\beta||^2 = \frac{||\beta||^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\gamma.$$

Poichè $\mathcal{Q}$ è non vuota e $\mathcal{Q}_\infty$ è vuota, il supporto di $\mathcal{Q}$ coincide con la sua parte affine e $\mathcal{Q}$ passa per almeno un punto proprio $P_o(x_o, 1)$, ovviamente $P_o \neq C$, le cui coordinate cartesiane soddisfano questa equazione; ciò comporta che il numero $\frac{||\beta||^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\gamma$ è strettamente positivo; denotato tale numero con R^2, $R > 0$, resta verificato che il supporto di $\mathcal{Q}$ è la superficie sferica $S(C, R)$. $\square$

L'iperquadrica $\mathcal{S}$ nell'enunciato precedente coincide con $\mathcal{Q}^2_{n,0}$ nelle notazioni del risultato di classificazione (Teorema 15.5).

In particolare, per $n = 2$, abbiamo che un'ipersfera è una circonferenza, ed è un particolare tipo di ellisse. Così, per $n = 3$, essa è una sfera (superficie sferica), ed è un particolare tipo di ellissoide.

Ciò premesso, si introduce la seguente:

Definizione 18.4 Si chiama *iperpiano principale* o *iperpiano di simmetria* di un'iperquadrica non vuota, non degenere di E ogni iperpiano diametrale ortogonale alla propria direzione coniugata.

Nel caso di una conica si parla di *asse*, mentre nel caso di una quadrica si parla di *piano principale*.

Teorema 18.5 *Ogni iperpiano principale α di un'iperquadrica $\mathcal{Q}$ è iperpiano di simmetria, ovvero per ogni punto proprio $P \in \mathcal{Q}$, il simmetrico di P rispetto ad α appartiene ancora a $\mathcal{Q}$.*

Dimostrazione: La dimostrazione è simile a quella del Teorema 12.5. Dato il punto proprio $P \in \mathcal{Q}$, ai fini di provare quanto asserito possiamo suppore $P \notin \alpha$. Si consideri la retta t per P perpendicolare ad α e sia H il punto di intersezione tra t e α. La direzione T_∞ di tale retta coincide dunque con il polo di α, per definizione di iperpiano principale. La retta t non è contenuta in $\mathcal{Q}$, perchè altrimenti si avrebbe $t \subset \pi_P$, e quindi anche $P \in \pi_{T_\infty}$, da cui $P \in \alpha$, il che si è escluso. Dunque t è secante e necessariamente incidente $\mathcal{Q}$ in un altro punto P' diverso da P; si osservi che tale punto non è T_∞ in quanto $T_\infty \notin \alpha = \pi_{T_\infty}$. Dunque P' è anch'esso un punto proprio. Proviamo che esso è il simmetrico di P rispetto ad α; infatti, H e T_∞ sono coniugati essendo $H \in \alpha$ e quindi H è il quarto armonico su t dopo P, P' e T_∞, ovvero H è il punto medio tra P e P'. $\square$

Discutiamo ora l'esistenza degli iperpiani principali.

Teorema 18.6 *Siano $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica di equazione*

$$\mathcal{Q}: \, {}^t xBx + 2^t\beta x + \gamma = 0$$

in un fissato riferimento Cartesiano ortonormale $\mathcal{R}$ e sia $\alpha = \pi_{A_\infty}$ un iperpiano passante per il centro di $\mathcal{Q}$, dove $A_\infty(u, 0)$. Allora α è un iperpiano principale se e solo se u è autovettore di B con autovalore associato non nullo.

Dimostrazione: Infatti, l'equazione di α in $k_{\mathcal{R}}$ è

$$\alpha : ({}^t u \;\; 0) \begin{pmatrix} B & \beta \\ {}^t\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\alpha : \, {}^t uBx +^t u\beta t = 0$$

o in coordinate Cartesiane

$$\alpha : \, {}^t uBx +^t u\beta = 0.$$

Ora, tale iperpiano è diverso da π_∞ se e solo se $Bu \neq 0$ ed in tal caso la direzione perpendicolare ad α è $D_\infty(Bu, 0)$. Dunque, per definizione, α è principale se e solo se $Bu \neq 0$ e $A_\infty = D_\infty$, il che si può riformulare come $Bu = \lambda u$ per un certo $\lambda \neq 0$. $\square$

Teorema 18.7 *Sia $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica di equazione*

$$\mathcal{Q}: \, {}^t xBx + 2^t\beta x + \gamma = 0$$

in un fissato riferimento Cartesiano ortonormale $\mathcal{R}$. Sia $\mathcal{S} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ l'insieme degli autovalori non nulli di B. Allora l'insieme degli iperpiani principali di $\mathcal{Q}$ è l'unione disgiunta di s sistemi lineari di iperpiani

$$\mathfrak{F}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{F}_{\lambda_s},$$

in corrispondenza biunivoca con gli autovalori $\lambda_i \in \mathcal{S}$, dove $dim(\mathfrak{F}_{\lambda_i}) = m_i - 1$, essendo m_i la molteplicità dell'autovalore λ_i.

Se $\lambda_i \neq \lambda_j$, e $\alpha_i \in \mathfrak{F}_{\lambda_i}$, $\alpha_j \in \mathfrak{F}_{\lambda_j}$, allora gli iperpiani principali α_i e α_j sono perpendicolari tra loro.

Dimostrazione: In base alla caratterizzazione fornita dal Teorema precedente, il generico iperpiano principale α è del tipo $\alpha = \pi_{D_\infty(u,0)} = \omega_{\mathcal{Q}}(D_\infty)$, con u autovettore relativo ad un autovalore $\lambda \in \mathcal{S}$; denotato con $V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ il relativo autospazio, abbiamo $D_\infty(u,0) = k_{\mathcal{R}}^{-1}([u,0])$ e pertanto ciò vuol dire che α appartiene al sottoinsieme $\mathfrak{F}_\lambda$ dello spazio duale $S(E)^*$ di $S(E)$ dato da:

$$\mathfrak{F}_\lambda := \omega_{\mathcal{Q}}(k_{\mathcal{R}}^{-1}(\mathbb{P}(V_\lambda \times \{0\})),$$

che è un sottospazio proiettivo, ovvero un sistema lineare di iperpiani, essendo $\omega_{\mathcal{Q}}$ e $k_{\mathcal{R}}$ trasformazioni proiettive.

Da ciò otteniamo la prima affermazione. L'ultima discende dal fatto che due autovettori u_i e u_j associati ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro, e quindi le corrispondenti direzioni $D_\infty(u_i,0)$ e $D'_\infty(u_j,0)$ sono perpendicolari (ciò è garantito dal fatto che il riferimento $\mathcal{R}$ è ortonormale); ma tali direzioni sono le direzioni normali ai corrispondenti iperpiani principali $\alpha_i = \pi_{D_\infty}$ e $\alpha_j = \pi_{D'_\infty}$. $\square$

Corollario 18.8 *Sia $\mathcal{Q}$ un'iperquadrica non degenere, non vuota di uno spazio Euclideo n-dimensionale.*

1) $\mathcal{Q}$ è un'ipersfera se e solo se tutti gli iperpiani diametrali sono principali.

2) Se $\mathcal{Q}$ è a centro e non è un'ipersfera, essa ammette un insieme $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ costituito da n iperpiani principali a due a due ortogonali tra loro.

3) Se $\mathcal{Q}$ non è a centro, essa ammette un insieme $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ costituito da $n-1$ piani principali a due a due ortogonali tra loro, ma non ammette mai n piani principali a due a due ortogonali.

Dimostrazione: 1) La condizione che tutti gli iperpiani diametrali siano principali equivale a chiedere che tutti i vettori $u \in \mathbb{R}^n$ non appartenenti al nucleo di B siano autovettori di B. Ciò accade se e solo se $B = \lambda I_n$, con $\lambda \neq 0$, e ciò per definizione equivale al fatto che $\mathcal{Q}$ sia un'ipersfera.

2) Basta considerare una base ortonormale di autovettori $\{u_1, \ldots, u_n\}$ relativa alla matrice B e costruire gli iperpiani polari $\alpha_i = \pi_{D^i_\infty}$ delle direzioni $D^i_\infty(u_i,0)$.

3) Come sopra, ma con la differenza che B ha rango $n-1$, per cui ogni base di autovettori $\{u_1, \ldots, u_n\}$ contiene esattamente un autovettore u con autovalore nullo, il quale non dà luogo ad un iperpiano principale (il lettore osservi che la corrispondente direzione $D_\infty(u,0)$ è il centro C_∞). Se ad es. $u = u_n$, allora possiamo determinare $n-1$ iperpiani principali $\alpha_i = \pi_{D^i_\infty}$, $i = 1, \ldots, n-1$, mutuamente ortogonali tra loro.

Per lo stesso motivo non possono esistere n iperpiani principali a due a due ortogonali perchè le direzioni coniugate corrisponderebbero a n vettori costituenti una base ortogonale di autovettori di B, tutti non appartenenti a $Ker(B)$, contro il fatto che la matrice B è singolare. □

Nel seguito esaminiamo più in dettaglio la struttura dell'insieme degli iperpiani principali nel caso delle coniche e delle quadriche.

Per quel che concerne le coniche, gli assi si possono anche caratterizzare come segue:

Proposizione 18.9 *Siano $\mathcal{C}$ una conica non degenere, non vuota di un piano Euclideo e sia d un suo diametro. Sono proprietà equivalenti:*

a) d è un asse.

b) Per ogni punto proprio $A \in d$, diverso dal centro, la polare p_A è perpendicolare a d.

c) Esistono due punti propri distinti $A, B \in d$ le cui polari sono rette proprie perpendicolari a d.

DIMOSTRAZIONE: Denotiamo con D'_∞ la direzione coniugata a d.

$a) \Rightarrow b)$ Per il teorema di reciprocità, abbiamo $D'_\infty \in p_A$, sicchè D'_∞ è la direzione di p_A, che per ipotesi è perpendicolare a d.

$b) \Rightarrow c)$ Essendo d una retta propria, è sufficiente scegliere due punti propri A e B diversi dal centro su di essa e applicare l'ipotesi.

$c) \Rightarrow a)$ Sappiamo che il polo D'_∞ di d è il punto di intersezione delle polari p_A e p_B, che è la direzione comune ad esse, perpendicolare a d. Dunque d è un asse. □

Teorema 18.10 *Sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere, non vuota, di un piano Euclideo.*

1) Se $\mathcal{C}$ è un'ellisse non circonferenza, essa ha esattamente due assi, perpendicolari tra loro ed entrambi secanti. In un riferimento Cartesiano avente come assi gli assi di $\mathcal{C}$, la conica ha equazione del tipo:

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, \ a \neq b.$$

2) Se $\mathcal{C}$ è un'iperbole, essa ha esattamente due assi, perpendicolari tra loro, di cui uno secante, detto trasverso, e l'altro esterno, detto non trasverso. In un riferimento Cartesiano avente come asse delle x l'asse trasverso e asse delle y l'asse non trasverso, la conica ha equazione del tipo:

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0.$$

3) Se $\mathcal{C}$ è una parabola, essa ha un solo asse, avente per direzione il centro C_∞ di questa e secante la parabola, determinato da:

$$a = p_{C_\infty^\perp},$$

cioè l'asse è la polare della direzione perpendicolare al centro. In un riferimento riferimento cartesiano ortonormale con origine nel punto proprio V di intersezione di $\mathcal{C}$ con l'asse, detto vertice, *e il cui asse delle ascisse coincide con a, l'equazione di $\mathcal{C}$ è del tipo:*

$$y^2 = 2px, \ \ p \neq 0. \tag{33}$$

Dimostrazione:

1) e 2) Per le coniche a centro non circonferenza, la matrice B ha esattamente due autovalori distinti λ_1 e λ_2 i cui autospazi hanno di dimensione 1; i corrispondenti sistemi lineari di iperpiani sono entrambi costituiti da un solo punto, ovvero la conica ammette esattamente due assi, perpendicolari tra loro.

Riguardo la posizione reciproca tra gli assi e la conica, cominciamo a determinare un'equazione di $\mathcal{C}$ in un riferimento nel quale gli assi del riferimento coincidono con gli assi della conica. Imponendo che p_{X_∞} sia l'asse y, si trae subito che la prima riga della matrice della conica è proporzionale al vettore $(1\,0\,0)$; così, imponendo che p_{Y_∞} sia l'asse x, si ottiene che la seconda riga è proporzionale a $(0\,1\,0)$. Infine, essendo necessariamete O il centro della conica, imponendo $p_O = i_\infty$, si deduce che la terza riga è proporzionale a $(0\,0\,1)$. In conclusione la matrice di $\mathcal{C}$ è diagonale. Poichè essa ha rango 3, otteniamo che $\mathcal{C}$ ammette nel riferimento in questione un'equazione del tipo:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 1 = 0. \tag{34}$$

Discutendo questa equazione si ottiene che, nel caso dell'ellisse, entrambi gli assi sono secanti, mentre nel caso dell'iperbole uno solo di essi lo è: infatti ciò segue facilmente notando che nel primo caso $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, mentre nel secondo caso $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Ora, essendo $\mathcal{C}$ non vuota, nel primo caso λ_1 e λ_2 devono essere entrambi negativi; nel secondo caso sono discordi. Usando queste informazioni si verifica subito quanto asserito.

Dopo ciò, scambiando eventualmente gli assi nel caso dell'iperbole, si perviene facilmente alle equazioni canoniche nell'enunciato.

3) In tal caso, B ha un solo autovalore λ non nullo, di molteplicità 1, per cui la conica ammette un solo asse a. È evidente d'altra parte che il polo di a dev'essere la direzione $C_\infty^\perp$ perpendicolare al centro, perchè il centro C_∞ in tale caso è proprio la direzione di a.

Inoltre a non è tangente alla parabola, in quanto passa per il centro C_∞, ma l'unica retta tangente a $\mathcal{C}$ in tale punto è i_∞, mentre a, in quanto diametro, è una retta propria. Dunque a è secante e deve quindi avere un altro punto V, necessariamente proprio, in comune la parabola.

Essendo V un punto proprio, e quindi diverso dal centro, sappiamo che la retta tangente p_V in V a $\mathcal{C}$ è perpendicolare ad a. Dunque nel riferimento Cartesiano indicato nell'enunciato l'asse x è a, mente l'asse y è p_V. Ora, abbiamo:

$$p_{Y_\infty(0,1,0)} : y = 0, \ \ p_{V(0,0,1)} : x = 0.$$

Dal primo fatto si trae che la seconda riga della matrice di $\mathcal{C}$ è proporzionale a $(0\,1\,0)$, mentre dal secondo fatto si ottiene che la terza riga è proporzionale a $(1\,0\,0)$. Infine, nel nostro riferimento $C_\infty = X_\infty(1,0,0)$ ed essendo $p_{X_\infty} : t = 0$, la prima riga della matrice è proporzionale a $(0\,0\,1)$. Da qui si perviene subito all'equazione canonica indicata per $\mathcal{C}$. $\square$

Definizione 18.11 Dicesi *vertice* di un conica non degenere ogni suo punto proprio che appartenga ad un asse.

Dal Teorema precedente abbiamo che ogni ellisse non circonferenza ha quattro vertici, due per ciascun asse, e simmetrici rispetto al centro; si chiama *asse maggiore* l'asse contenente i vertici aventi distanza dal centro più grande. Ogni iperbole ha due vertici appartenenti all'asse trasverso, anch'essi disposti simmetricamente rispetto al centro. Una parabola ha un solo vertice, già preso in considerazione nell'enunciato del Teorema precedente.

I coefficienti angolari degli assi di una conica a centro si possono determinare facilmente facendo uso dell'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati. A questo proposito, facendo riferimento all'equazione (24), si noti che:

-$a_{12} = 0$ se e solo se gli assi sono paralleli agli assi del riferimento.

-se $a_{12} \neq 0$, i coefficienti angolari degli assi si ricavano ponendo $m' = -\frac{1}{m}$ nella (24) e risolvendo l'equazione di secondo grado in m che ne risulta.

Infine, per le quadriche abbiamo le seguenti possibilità in merito ai piani principali:

Proposizione 18.12 *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non degenere, non vuota di uno spazio Euclideo tridimensionale.*

1) Se $\mathcal{Q}$ è a centro, non ipersfera, essa ha esattamente tre piani principali a due a due ortogonali, oppure ammette un fascio proprio di piani principali ed un altro piano principale perpendicolare a tutti i piani di tale fascio.

2) Se $\mathcal{Q}$ è un paraboloide, essa o ha esattamente due piani principali perpendicolari tra loro, oppure ammette esattamente un fascio (proprio) di piani principali.

DIMOSTRAZIONE: Anche in questo caso è sufficiente esaminare le molteplicità degli autovalori non nulli di B. Si osservi che, se λ è un autovalore di molteplicità 2, allora in base al Teorema 18.7, il corrispondente sistema lineare di iperpiani ha dimensione 1, e quindi è un fascio di piani; esso è proprio, in quanto dati due piani distinti in esso, le corrispondenti direzioni normali sono diverse, e quindi si tratta di piani propri incidenti. $\square$

Quanto appena provato giustifica la seguente:

Definizione 18.13 Una quadrica che ammette un fascio di piani principali si dice *rotonda*.

19 I fuochi di una conica e le coniche come luoghi geometrici

Nel seguito considereremo sempre coniche non degeneri, non vuote di un piano Euclideo.

Definizione 19.1 Un punto proprio F si dice *fuoco* di una conica $\mathcal{C}$ se non appartiene ad essa e l'involuzione $\omega_F : \mathfrak{F}(F) \to \mathfrak{F}(F)$ delle rette coniugate è l'involuzione circolare $\omega^\perp : \mathfrak{F}(F) \to \mathfrak{F}(F)$. La polare di un fuoco si chiama *direttrice*.

Ricordiamo che l'involuzione circolare fa corrispondere ad ogni retta r del fascio $\mathfrak{F}(F)$ la retta ad essa perpendicolare $r' \in \mathfrak{F}(F)$. Dunque, per le rette passanti per un fuoco le nozioni di "essere coniugate" e "essere perpendicolari" coincidono. Si osservi che un fuoco è sempre un punto *interno* alla conica, in quanto ovviamente $\omega^\perp$ è un'involuzione ellittica.

Proposizione 19.2 *Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro. Il centro è fuoco se e solo se $\mathcal{C}$ è una circonferenza. In tal caso non vi sono altri fuochi.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{C}$ una circonferenza di centro C; ogni diametro d è un asse, per cui il suo polo D'_∞ è la direzione ad esso perpendicolare; segue che il diametro coniugato d' è perpendicolare ad esso, in quanto passa per D'_∞. Viceversa, se il centro C è un fuoco, la conica è a centro e l'involuzione dei diametri coniugati è quella ortogonale. Ciò comporta che ogni diametro è asse quindi $\mathcal{C}$ è una circonferenza. Riguardo l'ultima affermazione, detto $R > 0$ il raggio della circonferenza, si scelga un riferimento con origine nel centro, di modo che

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2.$$

Se $F(a,b)$ è un fuoco, fissato $m \in \mathbb{R} - \{0\}$, si consideri la retta r per F di coefficiente angolare m. Si verifica facilmente che il polo P di tale retta è il punto di coordinate omogenee $(m, -1, \frac{ma-b}{R^2})$. La retta r' per F perpendicolare a r ha equazione

$$x + my - bm - a = 0$$

ed essendo coniugata a r deve passare per P, e da ciò si ottiene:

$$(bm + a)(ma - b) = 0.$$

Stante l'arbitrarietà di m si ottiene che l'unica possibilità è $a = b = 0$. $\square$

Lemma 19.3 *Sia $\mathcal{C}$ una conica non circonferenza, di centro C.*

a) Se F è un fuoco, la retta $[C, F]$ è un asse.

b) Se F e F' sono fuochi distinti, la retta $[F, F']$ è un'asse.

c) Tutti i fuochi appartengono ad uno ed uno solo asse, che si chiama asse focale.

Dimostrazione: a) Si osservi che $F \neq C$ sia nel caso in cui $\mathcal{C}$ è a centro, per la Prop. precedente, sia nel caso della parabola, in quanto F è proprio per definizione. Ovviamente $d := [C, F]$ è un diametro; detto D_∞ il suo polo, per definizione di fuoco la retta $[C, D_\infty]$ ad esso coniugata è perpendicolare a d, ovvero D_∞ è la direzione perpendicolare a quest'ultima, che quindi è asse.

b) Detto D il polo della retta $[F, F']$, osserviamo che D non può essere un punto proprio, perchè le rette $[F, D]$ e $[F', D]$, corrispondenti a $[F, F']$ nelle due involuzioni ω_F e $\omega_{F'}$, sono entrambe perpendicolari a $[F, F']$. Quindi $[F, F']$ è un diametro; ma essendo D perpendicolare a $[F, F']$, esso è un asse. La c) segue subito da a) e b): se $\mathcal{C}$ è a centro, dato un fuoco F, un qualsiasi altro fuoco $F' \neq F$ deve appartenere all'asse $[C, F]$; infatti se fosse $F' \notin [C, F]$, allora $\mathcal{C}$ ammetterebbe tre assi distinti: $[C, F]$, $[C, F']$ e $[F, F']$. $\square$

Teorema 19.4 *Sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere non vuota, non circonferenza.*

a) Se $\mathcal{C}$ è a centro, essa ha esattamente due fuochi, appartenenti all'asse maggiore nel caso dell'ellisse e all'asse traverso nel caso dell'iperbole. Essi sono simmetrici rispetto al centro.

b) Se $\mathcal{C}$ è una parabola, essa ha un solo fuoco, che appartiene all'asse.

Dimostrazione:

a) Si supponga $\mathcal{C}$ a centro; fissiamo un riferimento cartesiano coincidente col centro e avente per assi i due assi di $\mathcal{C}$, e tale che l'asse x coincida con l'asse maggiore ($\mathcal{C}$ ellisse) ovvero l'asse trasverso ($\mathcal{C}$ iperbole). Dunque l'equazione di $\mathcal{C}$ è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \epsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dove $\epsilon = \pm 1$ ($\epsilon = -1$ per l'iperbole). Per le scelte fatte, nel caso dell'ellisse abbiamo $a > b$. Sappiamo che il centro non è un fuoco; per il lemma 19.3, basta provare che sull'asse x vi sono esattamente due fuochi. Fissiamo un punto $F(\lambda, 0)$, diverso dall'origine. La polare di F ha equazione

$$p_F : x = \frac{a^2}{\lambda}. \tag{35}$$

Affinchè le due involuzioni ω_F e $\omega^\perp$ coincidano, è necessario e sufficente che $\omega_F(r) = \omega^\perp(r)$, essendo r una qualsiasi retta non parallela agli assi. Infatti, detto a l'asse x e a' la retta per F ad essa perpendicolare, abbiamo dalla definizione di asse che

$$\omega_F(a) = a'$$

ovvero

$$\omega_F(a) = \omega^\perp(a)$$

e quindi sia a che a' hanno la stessa immagine (rispettivamente a' e a) rispetto ad ω_F e a $\omega^\perp$. Scegliamo come r la retta di coefficiente angolare 1:

$$r : y = x - \lambda.$$

Dunque, posto $r' = \omega^\perp(r)$:

$$r' : y = -x + \lambda.$$

Sappiamo (Osservazione 11.6) che r e r' sono coniugate se e solo se lo sono i relativi punti di intersezione $A(\frac{a^2}{\lambda}, \frac{a^2-\lambda^2}{\lambda})$ e $A'(\frac{a^2}{\lambda}, \frac{\lambda^2-a^2}{\lambda})$ con p_F. In definitiva, $F(\lambda, 0)$ è fuoco se e solo se:

$$\begin{pmatrix} \frac{a^2}{\lambda} & \frac{a^2-\lambda^2}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a^2}{\lambda} \\ \frac{\lambda^2-a^2}{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$a^2b^2 - \epsilon(a^2 - \lambda^2)^2 - \lambda^2 b^2 = 0$$

che si risrive

$$(a^2 - \lambda^2)b^2 - \epsilon(a^2 - \lambda^2)^2 = 0$$

o equivalentemente, essendo $F \notin \mathcal{C}$ e quindi $\lambda^2 \neq a^2$:

$$b^2 - \epsilon(a^2 - \lambda^2) = 0$$

cioè

$$\lambda^2 = a^2 - \epsilon b^2. \tag{36}$$

In conclusione, ricordando che $a > b$ nel caso dell'ellisse, abbiamo che $\mathcal{C}$ ammette come fuochi esattamente i punti F_1 e F_2 di coordinate $F_1(-\sqrt{a^2-b^2},0)$, $F_2(\sqrt{a^2-b^2},0)$ nel caso dell'ellisse, ovvero $F_1(-\sqrt{a^2+b^2},0)$ e $F_2(\sqrt{a^2+b^2},0)$ nel caso dell'iperbole.

3) Si procede in modo simile, imponendo che un punto dell'asse della parabola sia fuoco. Considerando l'equazione canonica (33), si ottiene in tal caso che per un punto $F(\lambda,0)$ dell'asse, diverso dal vertice ($\lambda \neq 0$), la polare ha equazione:

$$p_F : x + \lambda = 0.$$

Di nuovo imponendo che la r retta per F con coefficiente angolare 1 sia coniugata a $r' = \omega^{\perp}(r)$ si perviene all'esistenza di un unico fuoco $F(\frac{p}{2},0)$. $\square$

L'importanza dei fuochi risiede nel risultato seguente, che caratterizza in modo uniforme le coniche di un piano euclideo come luoghi geometrici costitutiti dai punti per i quali è costante il rapporto delle distanze da un punto fisso e da una retta non passante per esso.

Teorema 19.5 *Sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere, non vuota di un piano Euclideo E. Se F è un fuoco, il rapporto tra le distanze $d(P,F)$ e $d(P,p_F)$ è una costante, detta* eccentricità *di $\mathcal{C}$. Denotata con e tale costante, si ha:*

$$\mathcal{C} \text{ ellisse} \iff e < 1$$

$$\mathcal{C} \text{ iperbole} \iff e > 1$$

$$\mathcal{C} \text{ parabola} \iff e = 1.$$

Infine, la parte affine di $\mathcal{C}$ è il luogo geometrico:

$$\{P \in E |\ d(P,F) = e\, d(P,p_F)\}. \tag{37}$$

Dimostrazione: Fissiamo un riferimento Cartesiano ortonormale avente per asse delle ascisse l'asse focale e origine O in F. Abbiamo dunque:

$$p_O : x = \alpha,$$

con $\alpha \neq 0$ (si ricordi che la polare del fuoco è perpendicolare all'asse focale e che il fuoco non appartiene ad essa); inoltre, per definizione di asse:

$$p_{Y_\infty} : y = 0.$$

Segue che la terza riga matrice A della conica rispetto a $k_{\mathcal{R}}$ è proporzionale al vettore riga $(1\ \ 0\ \ -\alpha)$, mentre la seconda a $(0\ 1\ 0)$; a meno di riscalare l'equazione di $\mathcal{C}$, possiamo dunque supporre che A sia della forma:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \mu & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

dove $\mu \neq 0$ e conseguentemente:

$$\mathcal{C} : \lambda x^2 + \mu y^2 + 2x - \alpha = 0.$$

Poichè O è fuoco, le bisettrici degli assi sono coniugate rispetto a $\mathcal{C}$ e quindi tali sono i punti di intersezione $P(\alpha, \alpha)$ e $P'(\alpha, -\alpha)$ di esse con la polare di O. Dunque

$$(\alpha\ \alpha\ 1) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \mu & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

da cui si ricava, essendo $\alpha \neq 0$:

$$\mu = \frac{\lambda\alpha + 1}{\alpha}.$$

Possiamo allora riscrivere l'equazione di $\mathcal{C}$ come segue:

$$\mathcal{C} : \lambda\alpha x^2 + (\lambda\alpha + 1)y^2 + 2\alpha x - \alpha^2 = 0.$$

Aggiungendo e sottraendo x^2 la stessa equazione si scrive anche come:

$$\mathcal{C} : (\lambda\alpha + 1)(x^2 + y^2) - (x - \alpha)^2 = 0.$$

In particolare $\lambda\alpha + 1 > 0$ e da questa equazione seguono la prima affermazione e quella riguardante il supporto di $\mathcal{C}$, dove si ponga $e = \sqrt{\frac{1}{\lambda\alpha+1}}$. Infine, si osservi che, se $\mathcal{C}$ è una parabola, allora $\lambda = 0$, per cui $e = 1$; nel caso di un'ellisse, dev'essere $\lambda\mu > 0$, da cui $\frac{\lambda}{\alpha} > 0$ e quindi anche $\lambda\alpha + 1 > 1$ il che implica $e < 1$ e similmente per l'iperbole. $\square$