

Prova Scritta di **Matematica Discreta**

C.L. **ITPS** – Corso A

17 Gennaio 2024

Esercizio 1. Quante sono le funzioni $f : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \{a, b, c\}$ tali che $f([3]) = b$?
Quante quelle tali che $f^{-1}(b) = \{[3]\}$?

Esercizio 2. Un misterioso numero x soddisfa la seguente proprietà:

- dividendo $1x$ (cioè: x) per 12, si ha resto 1;
- dividendo $21x$ per 13, si ha resto 2;
- dividendo $321x$ per 14, si ha resto 3;
- dividendo $4321x$ per 15, si ha resto 4.

Sapendo inoltre che x è un numero positivo di quattro cifre, chi è x ?

Esercizio 3. Sia $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

- (1) Si dica se l'anello quoziente $A := \mathbb{Z}_2[x]/(f)$ è o meno un campo, motivando la risposta;
- (2) si dica se l'elemento $[x^2 + 1]_f \in A$ è invertibile o un divisore dello zero in A , motivando la risposta;
- (3) si esibisca l'inverso di $[x^2 + 1]_f$ o un suo co-divisore di zero, a seconda della precedente risposta.

Esercizio 4. Assegnata la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{Z}_5),$$

calcolarne il determinante, l'inversa e il periodo moltiplicativo.

Esercizio 5. Assegnata la permutazione

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 4 & 9 & 10 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_{12},$$

si verifichi che la relazione \sim_σ su $X := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ definita ponendo, per ogni $x, y \in X$,

$$x \sim_\sigma y \quad : \Longleftrightarrow \quad \exists i \in \mathbb{Z} \text{ tale che } y = \sigma^i(x)$$

è di equivalenza, se ne descrivano esplicitamente le classi di equivalenza e si determini la cardinalità dell'insieme quoziente. Si elenchino poi gli elementi del sottogruppo $\langle \sigma \rangle \cap A_{12}$ di S_{12} .