

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2009/10

Appello del 1° febbraio 2010

1. Si consideri la seguente permutazione:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 9 & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in S_9.$$

- (a) Determinare $\tau = \sigma^{-4838}$.
- (b) Dire se τ è pari o dispari.

2. Assegnata l'applicazione

$$\varphi: \mathbb{Z}_{60} \rightarrow \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20},$$

$$[x]_{60} \mapsto ([x]_{12}, [x]_{20})$$

- (a) si verifichi che φ è ben definita ed è un omomorfismo di anelli e se ne determini il nucleo;
- (b) si determini la controimmagine $\varphi^{-1}([3]_{12}, [7]_{20})$;
- (c) si determini un elemento di $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20}$ che non ha controimmagine.

3. Sia $f(x) = x^4 + 20x^3 - 21x^2 + 56x - 56 \in \mathbb{Z}[x]$.

- (a) Scrivere una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$;
- (b) detta $\bar{f}(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ la riduzione modulo 3 di $f(x)$, determinare una sua fattorizzazione in $\mathbb{Z}_3[x]$;
- (c) dire se $[x]$ è invertibile in $\mathbb{Z}_3[x]/(\bar{f}(x))$, e in caso affermativo determinare il suo inverso.