LEZIONE 30

lunedì 27 novembre 2023 09:03

Integrali:

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$. Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia integrabile in $[a,b]$, abbiamo definito $\int_a^b f(x)\,dx$ come l'area con segno della regione di piano compresa tra il grafico di f in $[a,b]$ e l'asse x.

Notazione: Se $a \le b$ possiamo scrivere

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

In generale gli integrali di una funzione tra due estremi in ordine qualsiasi si dicono INTEGRALI DEFINITI

PROPRIETÀ:

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$ e siano $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabili in $[a,b]$. Allora:

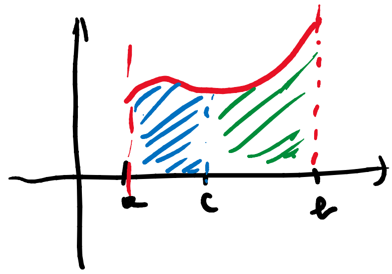
1) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

2) Se $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

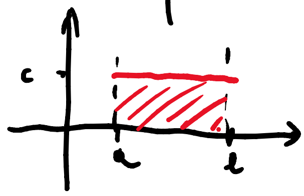
3) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$

4) Se $c \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



5) Se $c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$

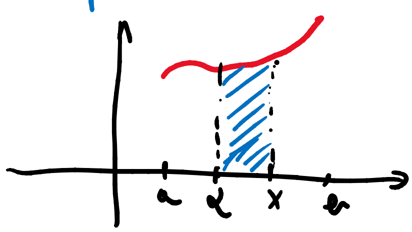


Come si calcolano gli integrali?

Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}$ $a \leq b$ e sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$. Fissiamo $\alpha \in [a, b]$ e consideriamo la funzione $F_\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F_\alpha(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt.$$

F_α si dice FUNZIONE INTEGRALE di f con punto base α.



I TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE.

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile in $[a, b]$. Sia $\alpha \in [a, b]$ e sia F_α la funzione integrale di f di punto base α. Se f è continua in $x_0 \in [a, b]$ allora F_α è derivabile in x_0 e $F_\alpha'(x_0) = f(x_0)$.

DIM

Dobbiamo far vedere che $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{F_\alpha(x) - F_\alpha(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$

$$\frac{F_\alpha(x) - F_\alpha(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_\alpha^x f(t)\,dt - \int_\alpha^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0}$$

$$= \frac{\cancel{\int_\alpha^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \cancel{\int_\alpha^{x_0} f(t)\,dt}}{x - x_0}$$

$$= \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0}$$

Per semplicità assumiamo $x_0 < x$.

Siccome f è continua in x_0: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c.
$\forall t \in \mathbb{R}$, $|t - x_0| < \delta$: $f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon$.

Se $|x - x_0| < \delta$ allora $\forall t \in [x_0, x]$ si ha: $|t - x_0| < \delta$
quindi $f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon$.

Allora $\int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon)\,dt \leq \int_{x_0}^x f(t)\,dt \leq \int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon)\,dt$

$$(f(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t)\,dt \leq (f(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$$

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Cioè $f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F_\alpha(x) - F_\alpha(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon$.

Per la def. di limite: $\lim_{x \to x_0} \frac{F_\alpha(x) - F_\alpha(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ $\blacksquare$

OSS

Se f è continua su tutto $[a, b]$ allora F_a sarà derivabile in $[a, b]$ e $F_a'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ e sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Si dice che una funzione $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ è una PRIMITIVA di f in $[a, b]$ se F è derivabile in $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$ in $[a, b]$.

Nota: Il I teorema fondamentale del calcolo integrale dice che la funzione integrale $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è primitiva di f in $[a, b]$.

ESEMPI

$f(x) = 1$ (funzione costante)

$F(x) = x$ è una primitiva di f.

$F(x) = x + 1$

$F(x) = x + 17$

$F(x) = x - \pi$

$\forall c \in \mathbb{R}$, $F(x) = x + c$ è una primitiva di f.

2) $f(x) = \sin x$

$F(x) = -\cos x + c$ con $c \in \mathbb{R}$ è una primitiva di f.

OSS: Se F_1 e F_2 sono due primitive di una funzione $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che

$F_2(x) = F_1(x) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

DIM

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0 \Rightarrow F_2 - F_1 \text{ è costante.}$$

TEOREMA (II TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ e sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Sia $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f in $[a,b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

DIM :

Per il I teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f in $[a,b]$.

Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $F(x) = F_a(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$.

$$\int_a^b f(t)\,dt = F_a(b) = F_a(b) - \underbrace{F_a(a)}_{=0} = (F(b) - c) - (F(a) - c)$$

$$= F(b) \cancel{-c} - F(a) \cancel{+c} = F(b) - F(a)$$

Ricapitoliamo:

Come si calcola $\int_a^b f(x)\,dx$?

1) Si cerca una primitiva F di f
2) Si calcola la differenza $F(b) - F(a)$.

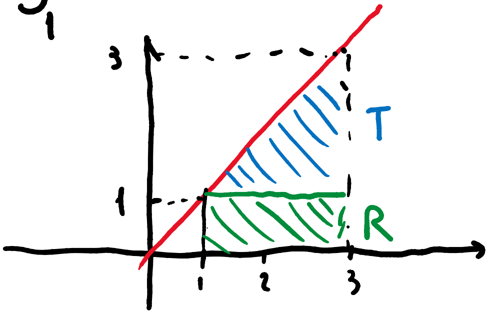
ESEMPIO

$$\int_1^3 x\,dx$$

$f(x) = x$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ (infatti $F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$)

$$\int_1^3 x\,dx = F(3) - F(1) = \frac{1}{2}\cdot 9 - \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$



Nota: dato che il grafico è una retta, l'area si poteva calcolare anche sommando l'area di un rettangolo e di un triangolo:

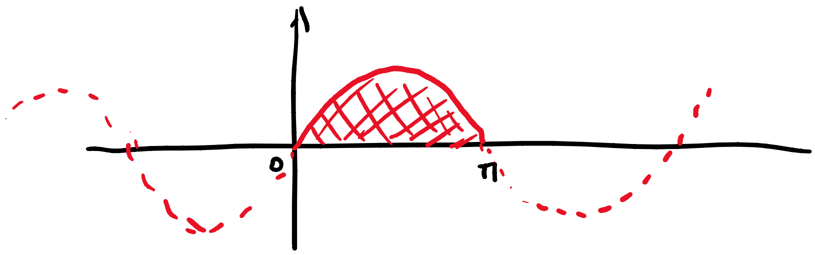
$\text{Area}(R) = 2 \cdot 1 = 2$

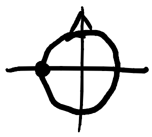
$\text{Area}(T) = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$

$2 + 2 = 4$

ESEMPIO

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx$$





$F(x) = -\cos x + c$

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = F(\pi) - F(0) = -\cos\pi - (-\cos 0)$$
$$= -(-1) - (-1)$$
$$= 1 + 1 = 2$$

In modo simile:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos(2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0$$

Notazione

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

ESEMPIO

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

Per calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ dobbiamo trovare una primitiva di f in $[a,b]$.

Per indicare le primitive usiamo un simbolo di integrale diverso.

DEF Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Si dice **INTEGRALE INDEFINITO** di f l'insieme delle primitive di f in $[a,b]$. Si indica con $\int f(x)\,dx$.

Notazione: Se F è una primitiva di f allora scriviamo

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

- $\int 1\,dx = x + c$
- $\int \alpha\,dx = \alpha x + c$
- $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$
- $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$
- $\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1.$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$

$$\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + c$$
$$\int x^{12}\,dx = \frac{1}{13}x^{13} + c$$
$$\int x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x} + c$$

- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c.$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x + c$

Nota: In generale

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

OSS

$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$
$\forall x \in [-1, 1]$

PROPRIETÀ

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

ESEMPI

$$\begin{aligned}
\int e^x - 3\sin x \, dx &= \int e^x \, dx - 3\int \sin x \, dx \\
&= e^x + c_1 - 3(-\cos x + c_2) \\
&= e^x + c_1 + 3\cos x - 3c_2 \\
&= e^x + 3\cos x + \underbrace{c_1 - 3c_2}_{c} \\
&= e^x + 3\cos x + c.
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} e^x - 3\sin x \, dx = e^x + 3\cos x \Big|_0^{\pi}$$

$$= e^{\pi} + 3\cos\pi - \left(e^{0} + 3\cos 0\right)$$
$$= e^{\pi} - 3 - (1 + 3)$$
$$= e^{\pi} - 7.$$

PROPRIETÀ

Se $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, allora

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

- $\displaystyle\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$

- $\displaystyle\int e^{3x-1}\,dx = \frac{1}{3} e^{3x-1} + c$

- $\displaystyle\int \cos(4x)\,dx = \frac{1}{4}\sin(4x) + c$

- $\displaystyle\int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = -\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + c = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + c$

- $\displaystyle\int \frac{1}{4x-1}\,dx = \frac{1}{4}\log|4x-1| + c$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}\,dx = \log|x+3| + c$

- $\displaystyle\int \frac{1}{2-x}\,dx = \frac{\log|2-x|}{-1} + c$

$$= -\log|2-x| + c$$

Ricordare

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c.$$

Attenzione: Vale solo per polinomi di 1° grado:

- $$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$
- $$\int \frac{1}{2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Più in generale: $\forall\, k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\int \frac{1}{x^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x}{k}\right) + c$$

$$\int e^{x^2}\,dx$$

Non si può calcolare.

Mentre $$\boxed{\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c}$$

PROPRIETÀ

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c.$$

ESEMPI

- $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$ $\quad f'(x) = -\sin x \quad f(x) = \cos x$

$$= -\log|\cos x| + c.$$

- $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$ $\quad f'(x) = 2x \quad f(x) = 1+x^2$

PROPRIETÀ

- $\displaystyle\int f(x)^{\alpha} f'(x)\,dx = \frac{1}{1+\alpha}\, f(x)^{1+\alpha} + c$

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + c$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int (\arctan x)^1 \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\arctan x + c$$

Formula di INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

DIM

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x).$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = \int (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)\,dx$$

$$= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$