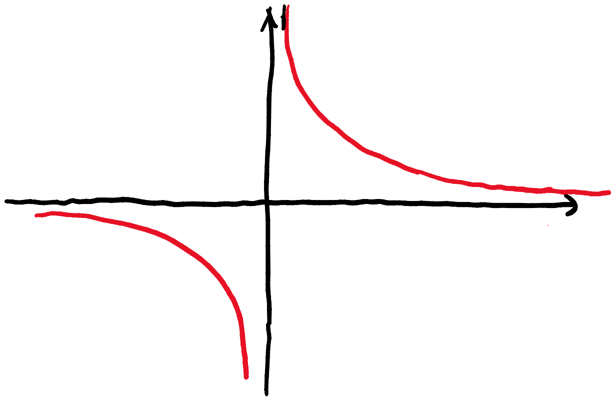
MATEMATICA - LEZIONE 12

venerdì 20 ottobre 2023 11:16

LIMITI DI FUNZIONI

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



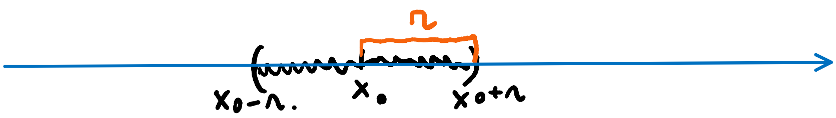
- Se x è molto grande $\frac{1}{x}$ si avvicina a 0.

- Se $x>0$ è vicino a 0, $\frac{1}{x}$ è molto grande
- Se $x<0$ è vicino a 0, $\frac{1}{x}$ "tende" a $-\infty$.

Per rendere matematicamente rigorose queste affermazioni abbiamo bisogno di diverse definizioni

Def: Sia $x_0 \in R$, definiamo INTORNO SFERICO di x_0 (o di centro x_0) con raggio $r>0$, l'intervallo

$$(x_0 - r, x_0 + r) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r \}$$



Def: Si dice AMPLIAMENTO DI $\mathbb{R}$, l'insieme

$$R^* := R \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Def: Definiamo INTORNO DI $+\infty$ una qualsiasi semiretta del tipo $(M, +\infty)$ con $M \in \mathbb{R}$

Definiamo INTORNO DI $-\infty$ una qualsiasi semiretta del tipo $(-\infty, M)$ con $M \in \mathbb{R}$.

Notazione: Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ indichiamo con $\mathcal{D}_{x_0}$ l'insieme di tutti gli intorni di x_0.

PROPRIETÀ (DEGLI INTORNI)

1) Ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti
2) Se $U, V \in \mathcal{D}_{x_0}$ allora $U \cap V \in \mathcal{D}_{x_0}$
3) Se $U \in \mathcal{D}_{x_0}$ allora $\exists\, V \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c. $V \subseteq U$ e $V \neq U$.
4) Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$, $x_1 \neq x_2$ allora $\exists\, U_1 \in \mathcal{D}_{x_1}$ e $U_2 \in \mathcal{D}_{x_2}$ t.c. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (PROPRIETÀ DI SEPARAZIONE)

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Sia $x_0 \in A$, si dice che x_0 è un **PUNTO ISOLATO** di A se $\exists\, U \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c. $U \cap A = \{x_0\}$.

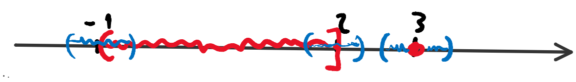
ESEMPIO

$A = [-1, 1] \cup \{2\}$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che x_0 è un **PUNTO DI ACCUMULAZIONE** per A se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di A.

ESEMPIO

$A = (-1, 2] \cup \{3\}$



3 NON è un punto di accumulazione (è un punto isolato)

2 è un punto di accumulazione per A
-1 è un punto di accumulazione per A
0 è un punto di accumulazione per A.

Notazione: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme indichiamo con $D_r(A)$ l'insieme dei punti di accumulazione di A in $\mathbb{R}^*$ (è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^*$, quindi può contenere anche $+\infty$ o $-\infty$)

ESEMPIO

$$A = (-1, 2] \cup \{3\}$$
$$D_r(A) = [-1, 2]$$

ESEMPIO

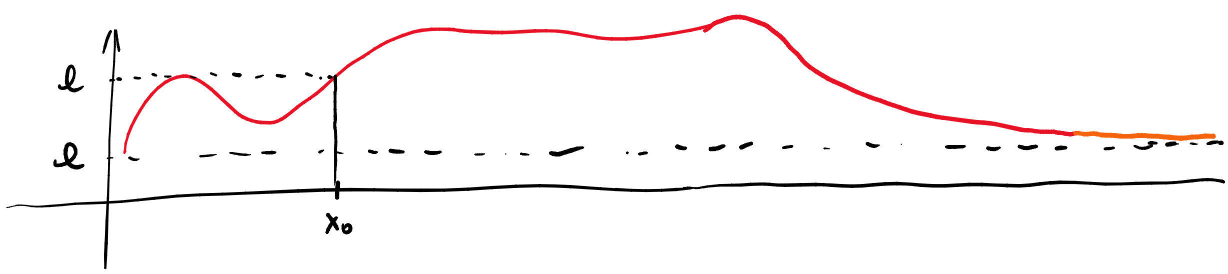
$$A = \mathbb{N}$$

$$D_r(A) = \{+\infty\}.$$

ESEMPIO

Se $A = (a, b)$ o $A = [a, b]$ o $A = [a, b)$ o $A = (a, b]$ allora:

$$D_r(A) = [a, b]$$

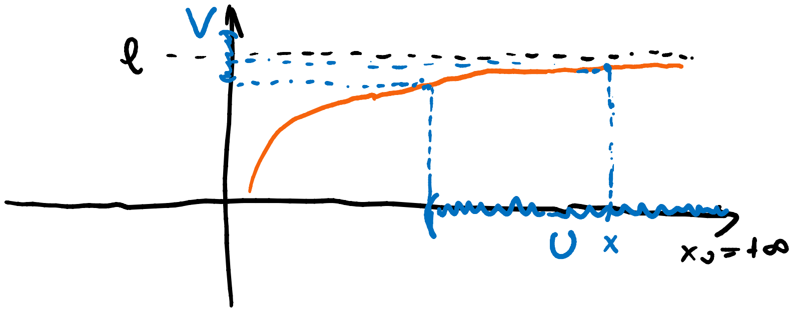


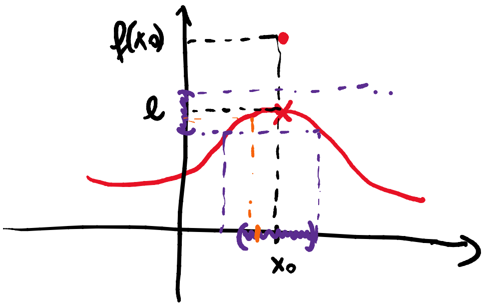
Def (LIMITE DI UNA FUNZIONE)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Sia $x_0 \in D_r(A)$ e sia $l \in \mathbb{R}^*$. Si dice che l È IL LIMITE DI $f(x)$ PER x CHE TENDE A x_0 se:

$\forall V \in \mathcal{I}_l \;\; \exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) \in V \;\; \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$.

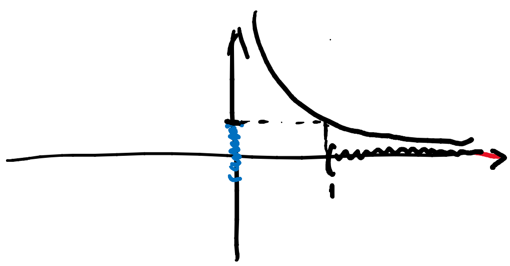
Si scrive che $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = l$





ESEMPIO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



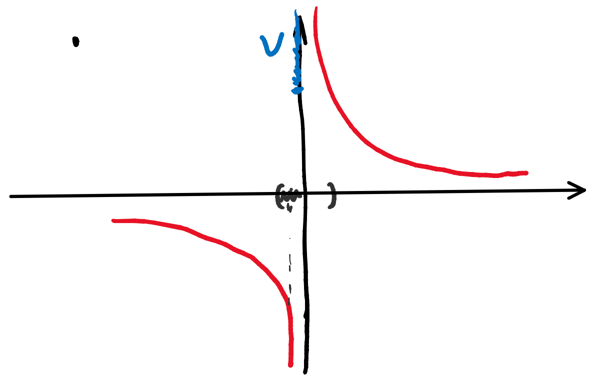
Sia $V \in \mathcal{I}_l$. Dobbiamo far vedere che $\exists U \in \mathcal{I}_{+\infty}$ t.c. $f(x) \in V \;\; \forall x \in U \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$V \in \mathcal{I}_0 \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R},\ r > 0$ t.c. $V = (-r, r)$

Se $U = (\frac{1}{r}, +\infty)$ allora $U \in \mathcal{I}_{+\infty}$ e $\forall x \in U$

si ha $x > \frac{1}{r} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < r$ e $x > 0$ quindi

$0 < \frac{1}{x} < r \Rightarrow \frac{1}{x} \in (0, r) \subseteq (-r, r) = V$



Attenzione: non è vero che $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$

La definizione non torna per via del fatto che ogni intorno di 0 contiene numeri negativi.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice che x_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA DESTRA PER A se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di $A \cap (x_0, +\infty)$. L'insieme dei punti di acc. da destra si indica con $D_r^+(A)$.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice che x_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA SINISTRA PER A se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di $A \cap (-\infty, x_0)$. L'insieme dei punti di acc. da sinistra si indica con $D_r^-(A)$.

ESEMPIO

$A = (-1, 2] \cup \{3\}$

$D_r^+(A) = [-1, 2)$

$D_r^-(A) = (-1, 2]$.

$D_r(A) = [-1, 2]$

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: A \to \mathbb{R}$.
Siano $x_0 \in D_r^+(A)$ e $l \in \mathbb{R}^*$. Si dice che l è
il LIMITE DESTRO di $f(x)$ per x CHE TENDE A x_0 se
$\forall V \in D_l \; \exists U \in D_{x_0}$ t.c. $f(x) \in V \;\; \forall x \in U \cap A \cap (x_0, +\infty)$.
(si scrive che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$).

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: A \to \mathbb{R}$.
Siano $x_0 \in D_r^-(A)$ e $l \in \mathbb{R}^*$. Si dice che l è
il LIMITE SINISTRO di $f(x)$ per x CHE TENDE A x_0
$\forall V \in D_l \; \exists U \in D_{x_0}$ t.c. $f(x) \in V \;\; \forall x \in U \cap A \cap (x_0, +\infty)$.
(si scrive che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$).

ESEMPIO

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

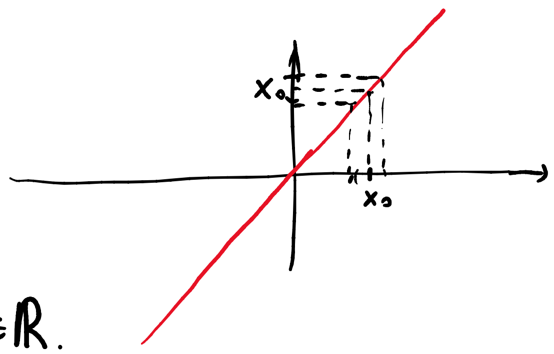
LIMITI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

1) $f(x) = x$

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

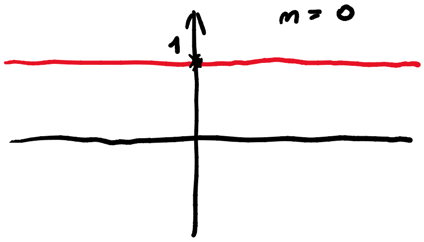
$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

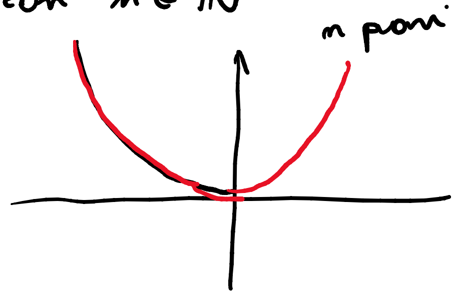
$\lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

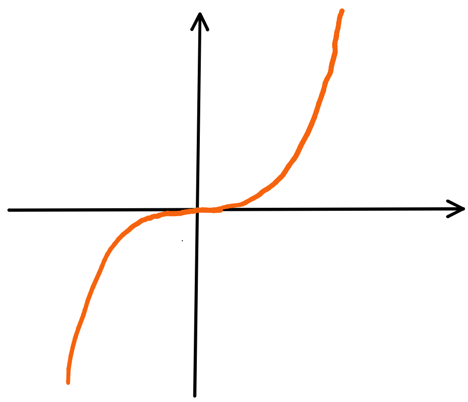


2) Potenze Naturali

$f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$







- $n = 0$

  $\lim_{x \to x_0} x^n = 1 \quad \forall \; x_0 \in \mathbb{R}^*$ (inclusi $x_0 = +\infty$ e $x_0 = -\infty$)

- n pari:

  $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

  $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

  $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$

- n dispari

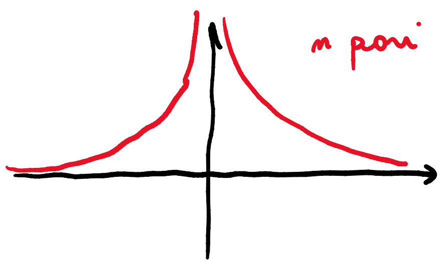
  $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n \quad \forall \; x_0 \in \mathbb{R}$.

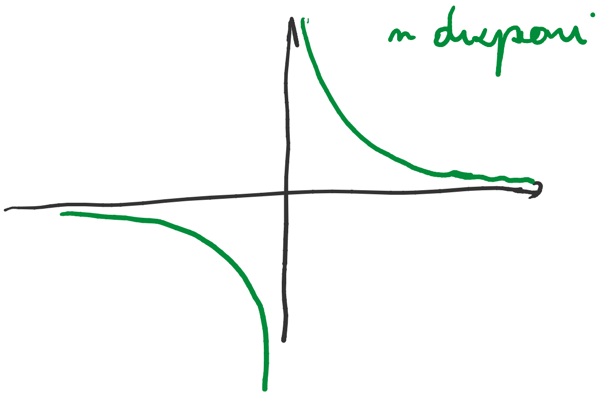
  $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

  $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

3) Potenze intere negative

$f(x) = \frac{1}{x^n}$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.





- n pari:

  $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n}$ se $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

  $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

oss Se $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D_i^+(A) \cap D_i^-(A)$. Allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell.$$

In particolare, se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$, si può dire che $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$.

- n dispari

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n} \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

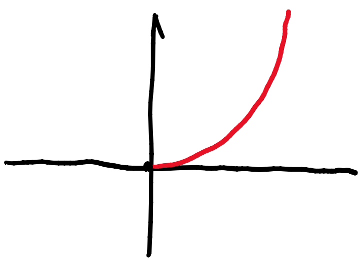
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n}$$

$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n}$ perché $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$.

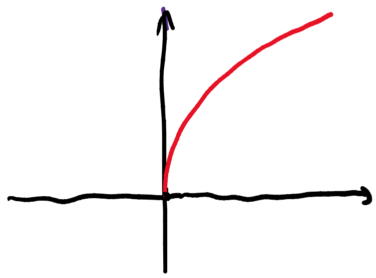
---

4) **Potenze reali**:

$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$



$\alpha > 1$



$0 < \alpha < 1$

$\alpha < 0$

- $\lim_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$ se $x_0 \in (0, +\infty)$.
- $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

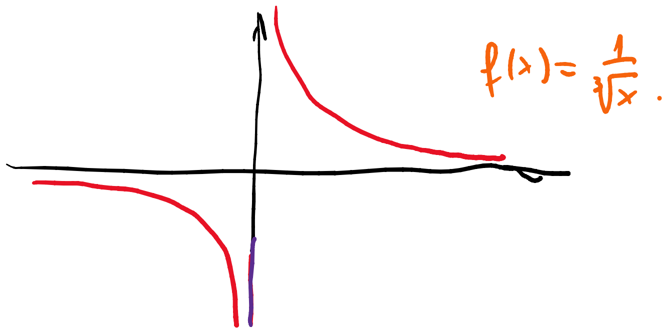
$$\cdot \lim_{x\to 0} x^{\alpha} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

ESEMPIO

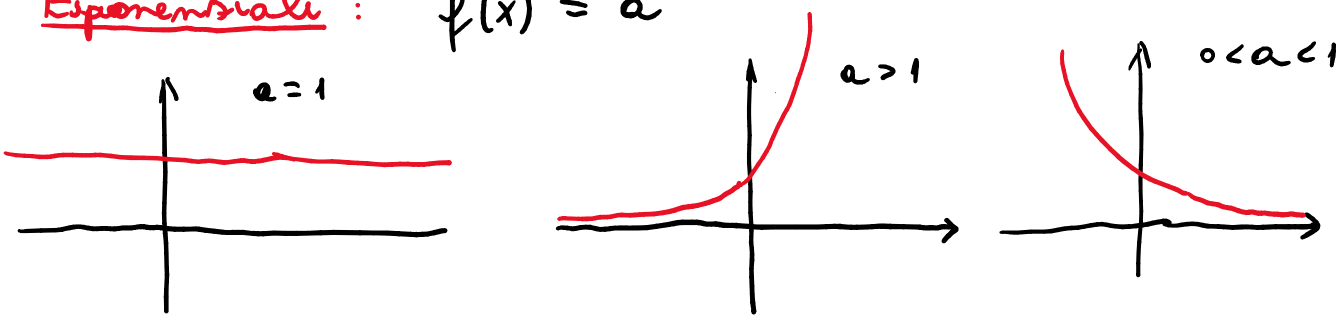
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \nexists \quad \text{perché} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \quad \text{ma} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$



5) Esponenziali: $f(x) = a^x$

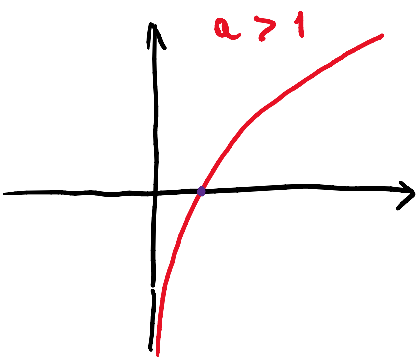


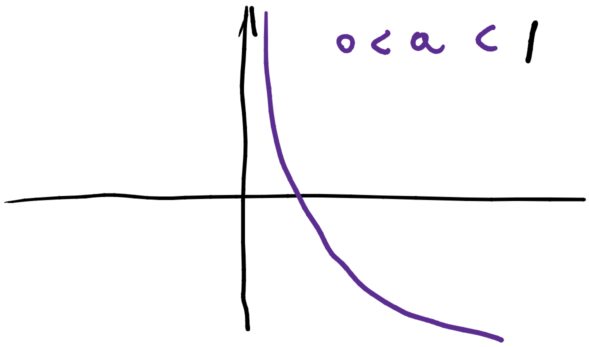
$$\cdot \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$$

$$\cdot \lim_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } a \in (0,1). \end{cases}$$

$$\cdot \lim_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

6) Logaritmi : $f(x) = \log_a x \qquad a \in \mathbb{R},\ a>0,\ a\neq 1$





$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$ se $x_0 \in (0, +\infty)$

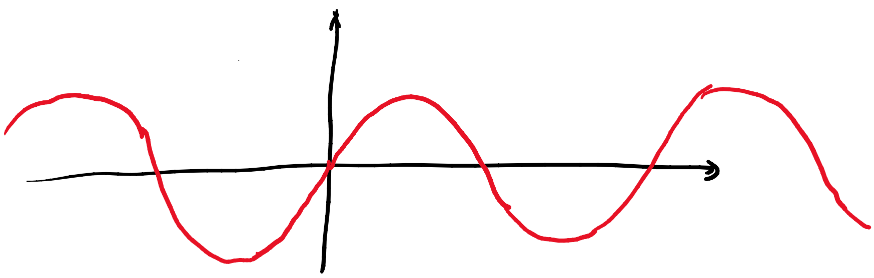
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ -\infty & \text{se } a \in (0,1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a>1 \\ +\infty & \text{se } a \in (0,1) \end{cases}$$

---

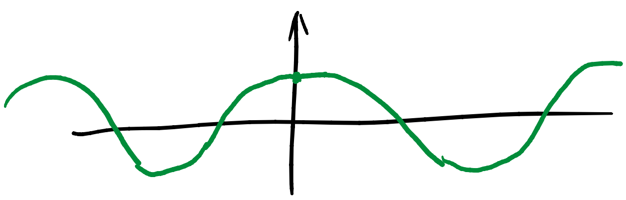
7) Funzioni trigonometriche

- $f(x) = \sin x$



- $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$
- $\lim_{x \to +\infty} \sin x \quad \nexists$
- $\lim_{x \to -\infty} \sin x \quad \nexists$

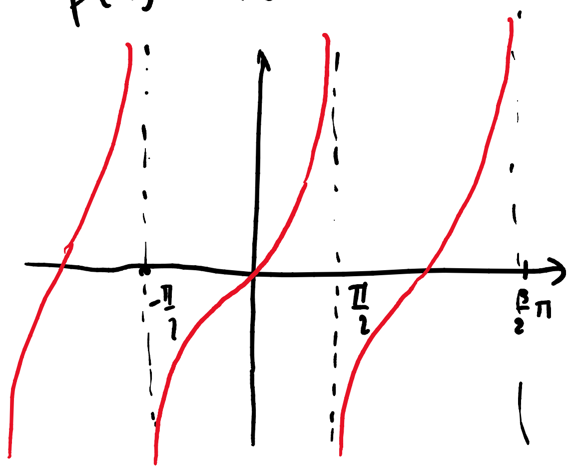
- $f(x) = \cos x$



$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$

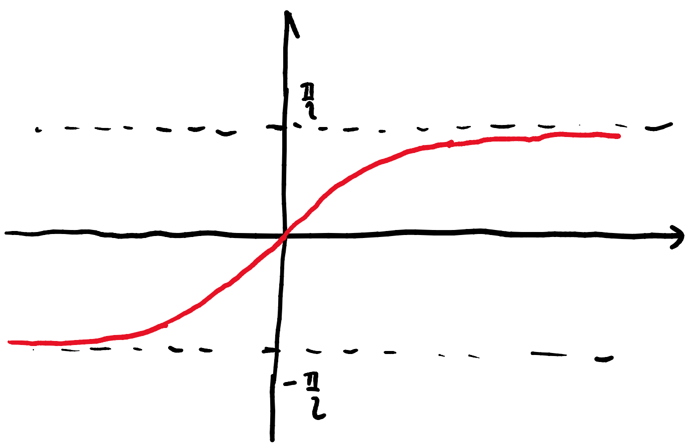
$\lim_{x \to +\infty} \cos x \nexists$ e $\nexists \lim_{x \to -\infty} \cos x$.

- $f(x) = \tan x$



- $\lim_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$
  se $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- $\lim_{x \to +\infty} \tan x \nexists$.
- $\nexists \lim_{x \to -\infty} \tan x$
- $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-} \tan x = +\infty$
- $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+} \tan x = -\infty$.

- $f(x) = \arctan x$

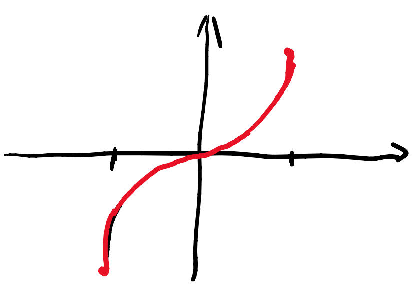


$\lim_{x \to x_0} \arctan x = \arctan x_0$.

$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

- $f(x) = \arcsin x$



$\lim_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$

$\forall x_0 \in [-1, 1]$.

Definizioni equivalenti di limite:

Abbiamo detto che

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se

$\forall V \in \mathcal{I}_\ell \ \exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) \in V \ \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.

- Se sia x_0 che ℓ sono in $\mathbb{R}$:

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$

  cioè

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - \ell| < \varepsilon \ \forall x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$.

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell = +\infty$.

  $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > M \ \forall x \in A$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta$.

- Se $\ell \in \mathbb{R}$ e $x_0 = +\infty$.

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0$ t.c. $|f(x) - \ell| < \varepsilon \ \forall x \in A$ t.c. $x > M$.