LABORATORIO DI MATEMATICA 5

mercoledì 11 febbraio 2026 09:38

Studio di funzioni

1) Dominio
2) Simmetrie del grafico (funzione pari / dispari)
3) Intersezioni del grafico con gli assi cartesiani
4) Segno della funzione.
5) Limiti significativi e asintoti.
6) Derivata.
7) Segno della derivata
8) Punti di max / min
9) Grafico
10) Altro: connessità, immagine ....

---

1) Regole per i domini:
   - denominatori $\neq 0$.
   - argomento dei logaritmi > 0.
   - Argomento delle radici di indice pari $(\sqrt{\ }, \sqrt[4]{\ }, \sqrt[6]{\ } \dots)$ ≥ 0.

ESEMPI

1) $$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x^2-4}$$

$x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 4 \rightarrow x \neq \pm 2$

$x - 1 \neq 0. \rightarrow x \neq 1$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, -2, 2\}$

$=]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$

2) $$f(x) = \frac{\ln(2x+1) - \ln(x+1)}{x}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 2x+1 > 0 \longrightarrow x > -\frac{1}{2} \\ x+1 > 0 \longrightarrow x > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x > -\frac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases}$$

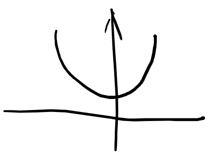
$x > -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad x \neq 0.$

$$\mathrm{Dom}(f) = \left]-\tfrac{1}{2}, +\infty\right[\setminus \{0\}$$
$$= \left]-\tfrac{1}{2}, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[.$$

3) $$f(x) = \frac{e^x \sqrt{x^2+1} - \sqrt{9x^2-1}}{x^2 + x - 2}$$

$$\begin{cases} x^2+1 \geq 0 & ① \\ 9x^2-1 \geq 0 & ② \\ x^2+x-2 \neq 0. & ③ \end{cases}$$

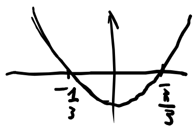
① $x^2+1 \geq 0$ $\quad (x^2+1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ impossibile$)$



$x^2+1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

② $9x^2-1 \geq 0$ $\quad (9x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{3})$

$x \leq -\frac{1}{3} \vee x \geq \frac{1}{3}$



③ $x^2 + x - 2 \neq 0$

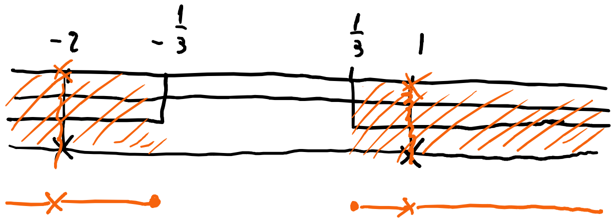
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \le -\frac{1}{3} \ \vee \ x \ge \frac{1}{3} \\ x \ne 1 \ \wedge \ x \ne -2 \end{cases}$$

Nota

$x^2 + x - 2 = 0 \iff x = -2 \ \vee x = 1$

$x^2 + x - 2 \ne 0 \iff x \ne -2 \ \wedge \ x \ne 1$



$$Dom(f) =]-\infty, -2[\ \cup \ ]-2, -\tfrac{1}{3}] \ \cup \ [\tfrac{1}{3}, 1[\ \cup \ ]1, +\infty[.$$

4) $$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-x}}$$

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} \ne 0 \\ 1 - x \ge 0 \end{cases} \iff 1 - x > 0 \iff x < 1 .$$

---

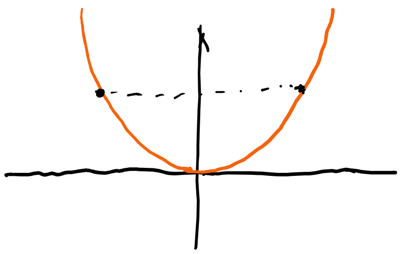
2) Simmetrie:

- f è PARI se $Dom(f)$ è simmetrico rispetto a 0 e $\forall x \in Dom(f)$: $f(-x) = f(x)$.

$f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

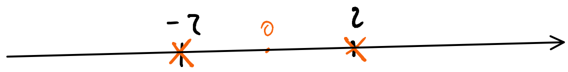
f è pari



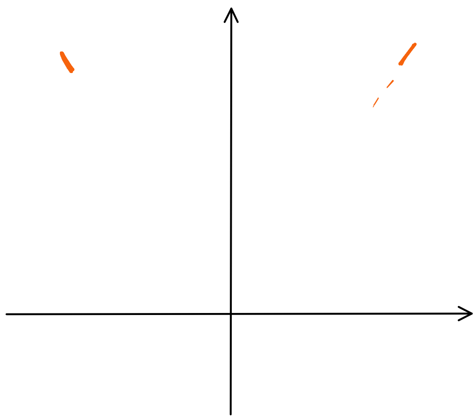
Nota: Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y.

- $$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2 - 4}$$

$Dom(f) =]-\infty, -2[\ \cup \ ]-2, 2[\ \cup \ ]2, +\infty[\qquad x^2 - 4 \ne 0 \iff x \ne \pm 2$



$$f(-x) = \frac{e^{(-x)^2}}{(-x)^2-4} = \frac{e^{x^2}}{x^2-4} = f(x)$$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2-4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty.$$

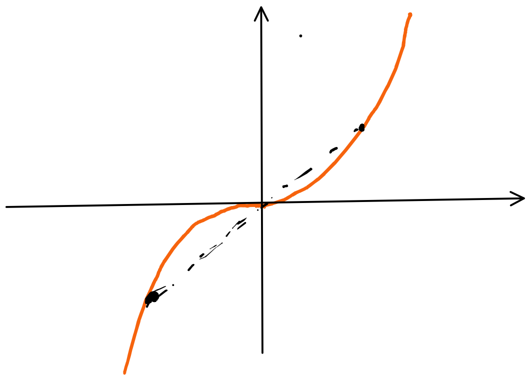
Siccome f è pari, anche

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

- f è **DISPARI** se $\mathrm{Dom}(f)$ è simmetrico rispetto a 0 e $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$: $f(-x) = -f(x)$

<u>Nota</u> Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto a $(0,0)$.

$$f(x) = x^3$$
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$$



- Ci sono funzioni che non sono né pari né dispari.

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

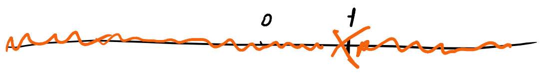
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} = -\frac{e^{-x}}{x} = -\frac{1}{x e^x} \neq f(x) = \frac{e^x}{x}$$
$$\neq -f(x) = -\frac{e^x}{x}$$

f non è pari né dispari.

- $$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\rightarrow$ Non è simmetrico.



f non può essere pari né dispari.

3) Intersezioni con gli assi:

Asse y:
- $0 \notin Dom(f)$ non ci sono intersezioni
- $0 \in Dom(f)$, l'unico punto di intersezione con l'asse y è $(0, f(0))$

Asse x:
Bisogna risolvere $f(x) = 0$
- Se non ci sono soluzioni: non ci sono intersezioni
- Se ci sono soluzioni x_1, x_2, x_3 ----
  le intersezioni sono i punti
  $(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0)$ ------

4) Segno della funzione (si usano le regole che abbiamo visto per lo studio del segno di prodotti / frazioni)
5) Limiti (visti ieri)
6) Derivata (lezione di ieri)
7) Segno della derivata
8) Punti di max e min di f.

Sono i punti del dominio in cui cambia il segno della derivata.

ESEMPIO:

$$f(x) = x^2 e^x$$

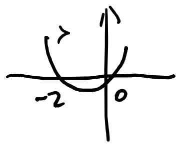
$$\begin{aligned} f'(x) &= Dx^2 \cdot e^x + x^2 De^x \\ &= 2x e^x + x^2 e^x \\ &= e^x (2x + x^2) \end{aligned}$$

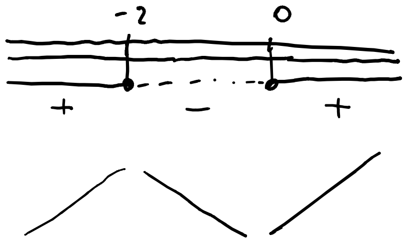
Segno della derivata:

$e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$2x + x^2 > 0 \iff x < -2 \lor x > 0$.

$$(x^2+2x=0 \qquad x(x+2)=0 \qquad x=0 \vee x=-2)$$





segno di f'.

$x=-2$ è un punto di massimo locale.

$x=0$ è un punto di minimo locale per f.

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1} \qquad \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

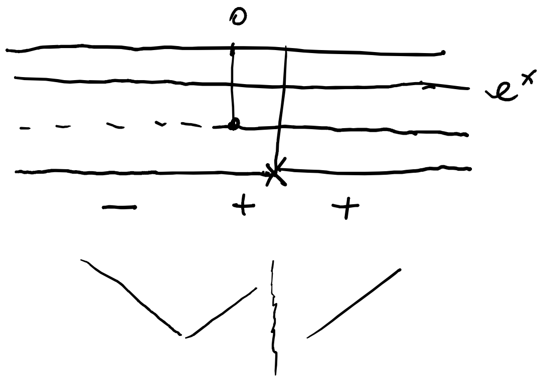
$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x x - \cancel{e^x} + \cancel{e^x}}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{e^x x}{(x-1)^2}$$

$e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

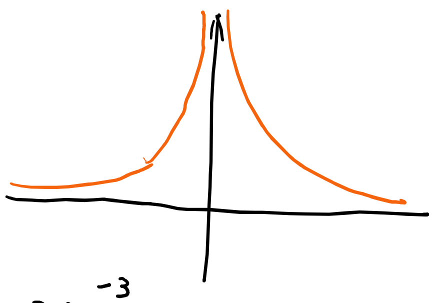
$x > 0 \iff x > 0$

$(x-1)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$



ESEMPIO

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

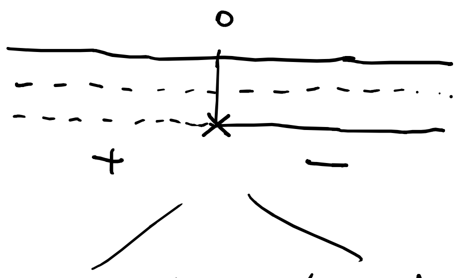


$$f'(x) = D\, x^{-2} = -2x^{-3}$$

$$= \frac{-2}{x^3}$$

$-2 > 0$ mai!

$x^3 > 0 \iff x > 0$



qui in $x=0$ cambia il segno della derivata ma $0 \notin Dom(f)$ e quindi in 0 non ci sono punti di max/min (c'è un asintoto verticale).

Asintoti:

Nel calcolare i limiti (punto 5) si trovano anche gli asintoti:

Asintoti orizzontali:

Sono rette orizzontali a cui il grafico si avvicina per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

C'è un asintoto orizzontale $(y = \ell)$ per $x \to +\infty$.

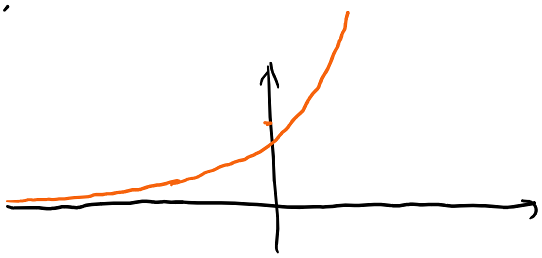
$$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

La retta $y = \ell$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ se

$$\exists \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

ESEMPI

$f(x) = e^x$



- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

  La retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

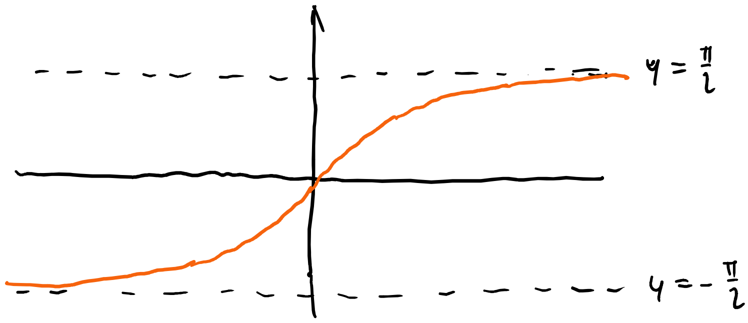
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

  non c'è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

- $f(x) = \arctan x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

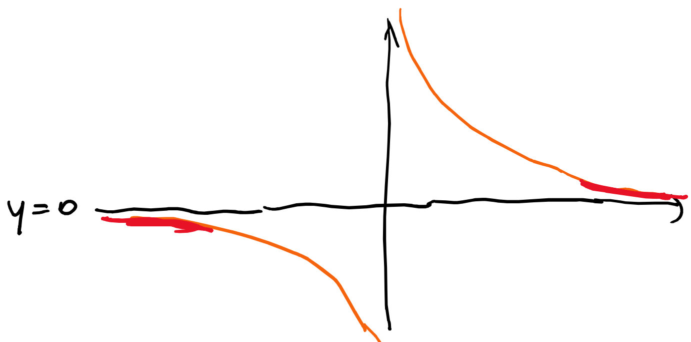
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$



$y = \frac{\pi}{2}$ è a.o per $x \to +\infty$

$y = -\frac{\pi}{2}$ è a.o per $x \to -\infty$

- $f(x) = \frac{1}{x}$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

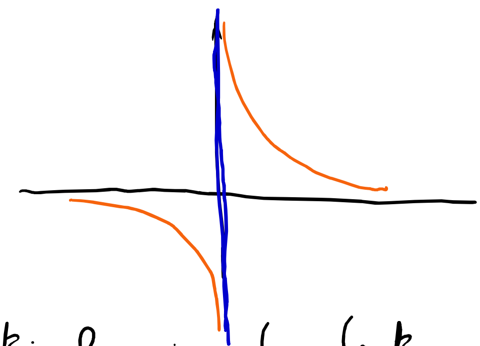
$y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$

Asintoti verticali

La retta verticale di eq. $x = x_0$ è un asintoto verticale se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \;\vee\; \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

(asintoto verticale da destra) (asintoto verticale da sinistra)

- $f(x) = \frac{1}{x}$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

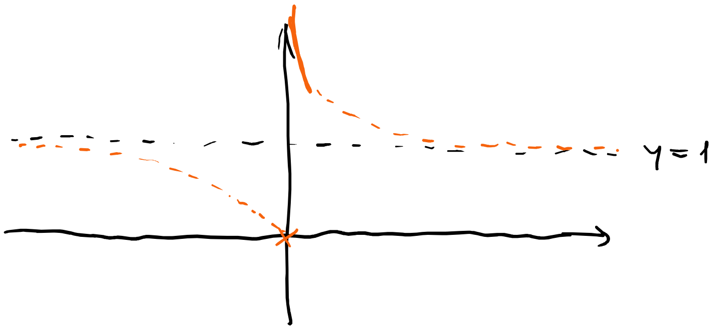
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$x = 0$ è un asintoto verticale sia da destra che da sinistra.

• $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$



$x = 0$ è un asintoto verticale solo da destra

ESERCIZI DI RIEPILOGO

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$$

1) Dom(f):

$$e^x - 1 \neq 0$$
$$e^x \neq 1$$
$$x \neq 0$$

$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2) Simmetrie.

$$f(-x) = \frac{e^{-2x}}{e^{-x} - 1}$$

f non è pari né dispari.

3) • $0 \notin Dom(f) \Rightarrow$ NO intersezioni del grafico con l'asse y.

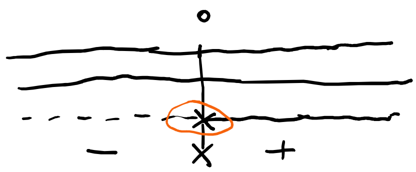
• $f(x) = 0 \quad \frac{e^{2x}}{e^x - 1} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 0$ impossibile.

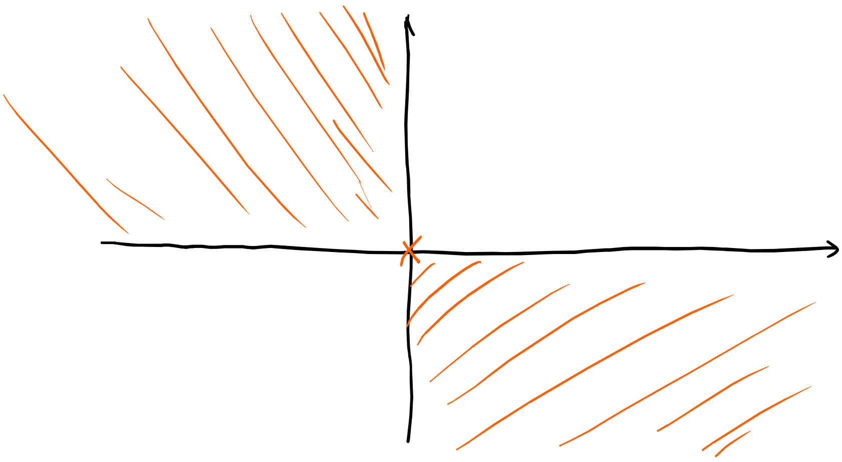
NO intersezioni del grafico con l'asse x.

4) $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$

• $e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$





5) Limiti:

- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$ $\quad \dfrac{+\infty}{+\infty}$ f.i.

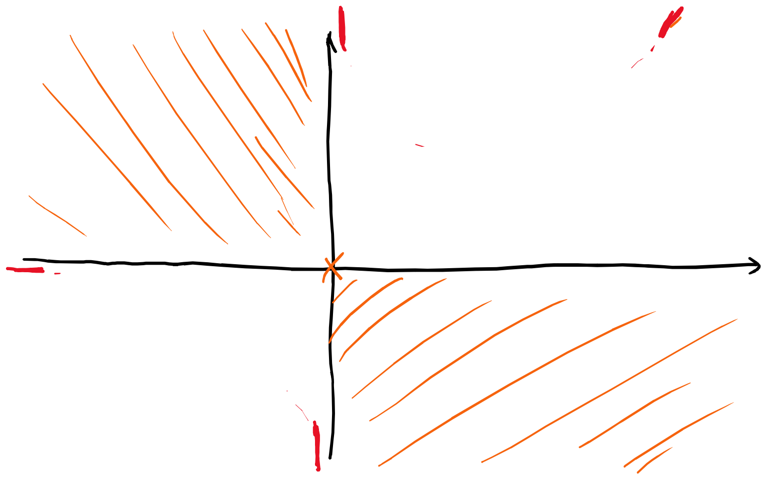
$= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

- $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1} = \dfrac{e^{-\infty}}{e^{-\infty} - 1} = \dfrac{0}{0-1} = \dfrac{0}{-1} = 0$

- $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$
$x = 0$ è un asintoto verticale sia da destra che da sinistra



$$f'(x) = D\left(\frac{e^{2x}}{e^x-1}\right) = \frac{De^{2x}\cdot(e^x-1) - e^{2x}D(e^x-1)}{(e^x-1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}\cdot 2\,(e^x-1) - e^{2x}\cdot e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}\left(2(e^x-1) - e^x\right)}{(e^x-1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}\left(2e^x-2-e^x\right)}{(e^x-1)^2}$$

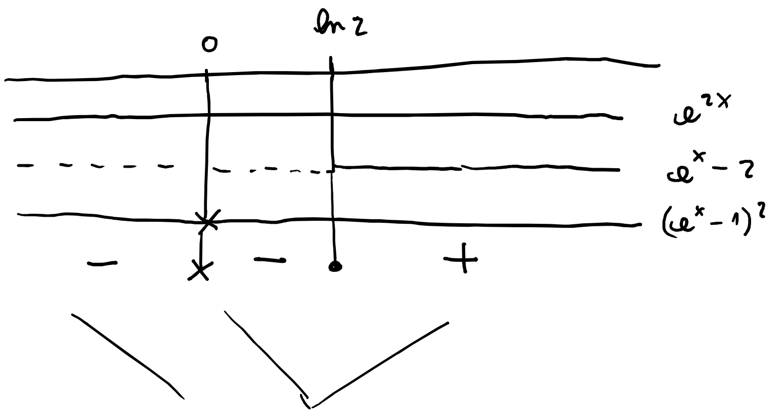
$$= \frac{e^{2x}(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$$

7) Segno di f'.

$e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$e^x - 2 > 0 \iff e^x > 2 \iff x > \ln 2$

$(e^x-1)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$.

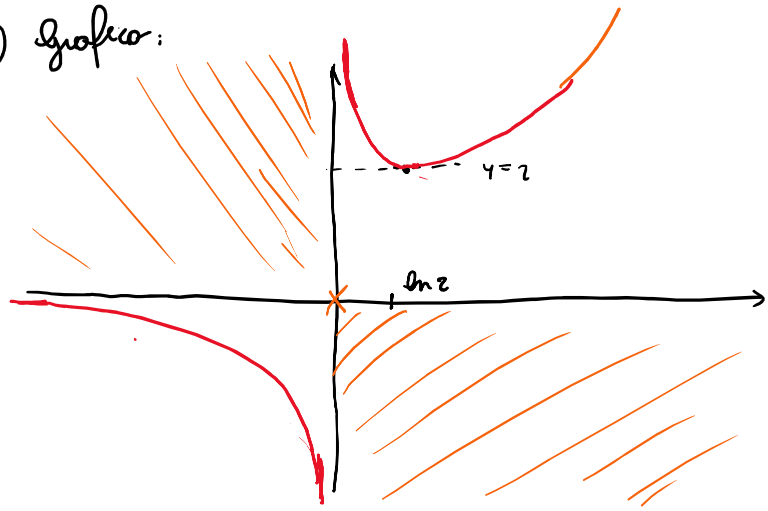


$2\ln 2 = \ln 2^2 = \ln 4$

8) $x = \ln 2$ è un punto di minimo locale

e $f(\ln 2) = \dfrac{e^{2\ln 2}}{e^{\ln 2}-1} = \dfrac{4}{2-1} = 2$

9) Grafico:



ESERCIZIO

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln^2 x + 2}$$

$$\begin{cases} x > 0 & (\text{per } \ln x) \\ \ln^2 x + 2 \neq 0 \rightarrow \ln^2 x \neq -2 \quad \text{vero } \forall x > 0. \end{cases}$$

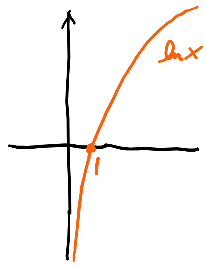
$x > 0$

$\mathrm{Dom}(f) =]0, +\infty[$.

2) $\mathrm{Dom}(f)$ non è simmetrico. quindi f non è pari né dispari.

3) · $0 \notin \mathrm{Dom}(f)$ no intersezioni con l'asse y

· $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{\ln^2 x + 2} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$
$\Leftrightarrow x = e^0$
$\Leftrightarrow x = 1$

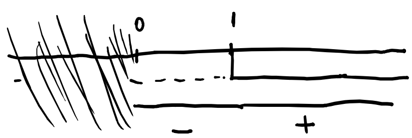


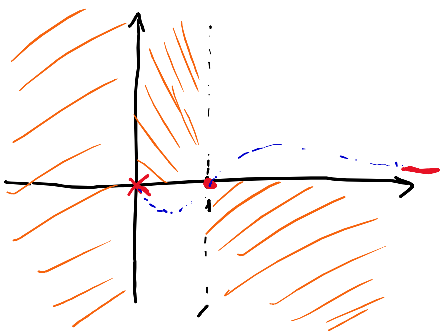
$(1,0)$ è intersezione del grafico con l'asse x

4) Segno

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > e^0 \Leftrightarrow x > 1$

$\ln^2 x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$





5) limiti:

· $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{1 + \underbrace{\ln^2 x}}$ $\qquad \frac{+\infty}{+\infty}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln^2 x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

· $\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1 + \ln^2 x}$ $\qquad \frac{-\infty}{+\infty}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\ln^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

· $y = 0$ è un asintoto orizzontale

· non ci sono asintoti verticali.

---

6) Derivata

$$f'(x) = D\left(\frac{\ln x}{\ln^2 x + 2}\right) = \frac{(D \ln x) \cdot (\ln^2 x + 2) - \ln x \, D(\ln^2 x + 2)}{(\ln^2 x + 2)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot (\ln^2 x + 2) - \ln x \, (2 \ln x \cdot D \ln x)}{(\ln^2 x + 2)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot (\ln^2 x + 2) - 2 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln^2 x + 2)^2}$$

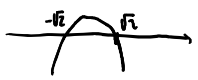
$$= \frac{\frac{1}{x}\left(\cancel{\ln^2 x} + 2 - \cancel{2} \ln^2 x\right)}{(\ln^2 x + 2)^2} = \frac{2 - \ln^2 x}{x(\ln^2 x + 2)^2}$$

7) Segno di f'.

$2 - \ln^2 x > 0$

$t = \ln x$

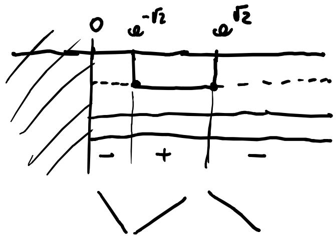
$2 - t^2 > 0 \qquad (t^2 = 2 \iff t = \pm\sqrt{2})$



$-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$

$-\sqrt{2} < \ln x < \sqrt{2}$

$e^{-\sqrt{2}} < x < e^{\sqrt{2}}$



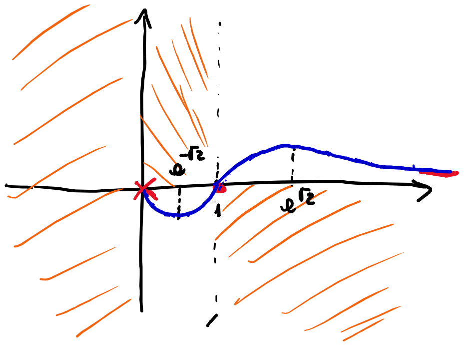
· $x > 0 \iff x > 0$

· $(\ln^2 x + 2)^2 > 0 \quad \forall x \in Dom(f)$

8) $x = e^{-\sqrt{2}}$ è min locale $\qquad f(e^{-\sqrt{2}}) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2+2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$x = e^{\sqrt{2}}$ è punto di max locale $\qquad f(e^{\sqrt{2}}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2+2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

9)

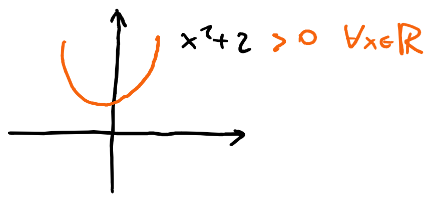


$$D \ln^2 x = 2 \ln x \; D \ln x = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

Ricordare

- $D\, f(x)^2 = 2 f(x) \cdot D f(x)$
- $D\, f(x)^n = n\, f(x)^{n-1} \cdot D f(x).$

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}$$



1) • Dom(f):

$$\begin{cases} x^2+2 \geq 0 \\ \sqrt{x^2+2} \neq 0 \end{cases} \iff x^2+2 > 0 \quad \text{vero } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dom$(f) = \mathbb{R}. =]-\infty, +\infty[$

2) $f(-x) = \dfrac{-x-1}{\sqrt{(-x)^2+2}} = -\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}} \quad \begin{matrix} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{matrix}$

né pari, né dispari

3) $\cdot\; 0 \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\qquad f(0) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è int. del profilo con l'asse y.

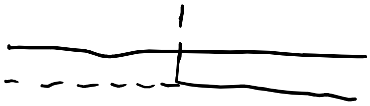
- $f(x)=0 \qquad \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}=0 \iff x-1=0 \iff x=1$

$(1,0)$ è int. del grafico con l'asse x.

4) $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}$

$x-1>0 \iff x>1$

$\sqrt{x^2+2}>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.



5) limiti e asintoti.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}} \qquad \frac{+\infty}{+\infty}$$

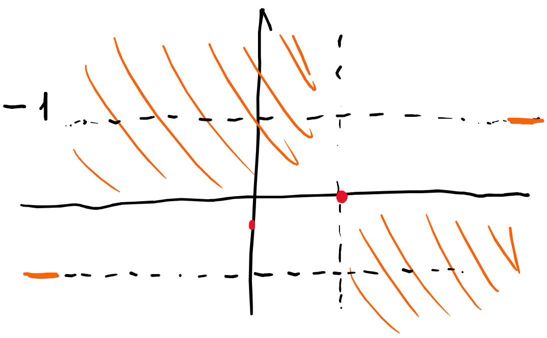
Attenzione

$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x & \geq 0 \\ -x & <0. \end{cases}$

$$=\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}} \qquad \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} = -1$$



$y=1$ è as. or. per $x\to+\infty$

$y=-1$ è as. or. per $x\to-\infty$

6) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}$

$$f'(x)=\frac{D(x-1)\cdot\sqrt{x^2+2}-(x-1)\cdot D(\sqrt{x^2+2})}{x^2+2}$$

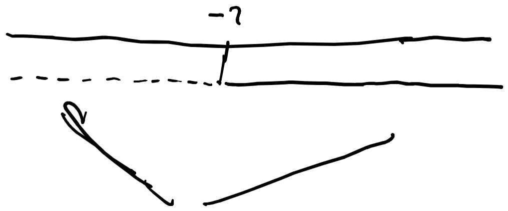
$$=\frac{\sqrt{x^2+2}-(x-1)\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}\cdot\cancel{2}x}{x^2+2}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{x^2+2}\cdot\sqrt{x^2+2}-(x-1)x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}$$

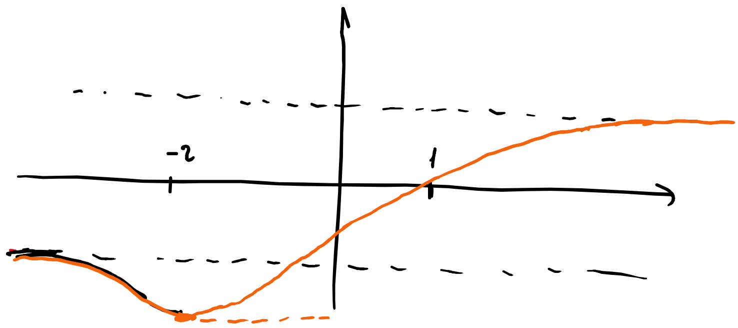
$$=\frac{\cancel{x^2}+2-\cancel{x^2}+x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \frac{2+x}{\underbrace{(x^2+2)}_{>0}\underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{>0}}$$

$2+x > 0 \iff x > -2$



$x = -2$ è punto di min locale per f.



$$f(-2) = \frac{-2-1}{\sqrt{4+2}} = \frac{-3}{\sqrt{6}}$$