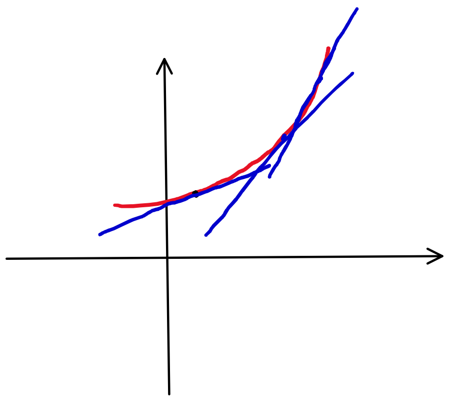
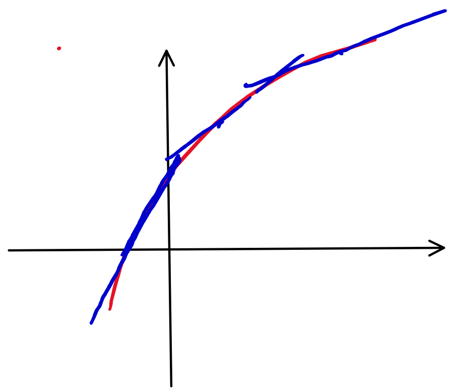
LEZIONE 28

venerdì 14 novembre 2025 11:06





Funzione convessa:
- il coeff. angolare della retta tangente al grafico cresce
- il grafico è sopra la retta tangente in ogni punto.

Funzione concava
- il coeff. angolare della retta tangente al grafico decresce
- il grafico è sotto la retta tangente in ogni punto.

Def: Sia I un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$.

Si dice che f è CONVESSA IN I se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Si dice che f è CONCAVA in I se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Si dice che f è STRETTAMENTE CONVESSA (o STRETTAMENTE CONCAVA) se le disuguaglianze sono strette quando $\lambda \in \,]0,1[$ e $x_1 \neq x_2$.

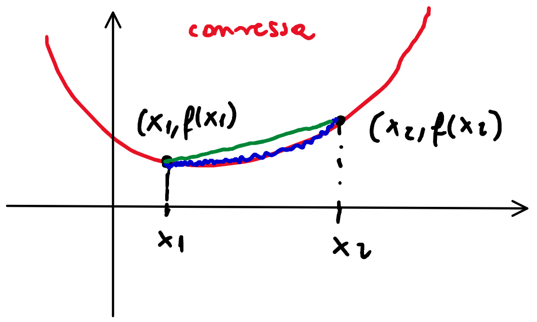
Interpretazione:

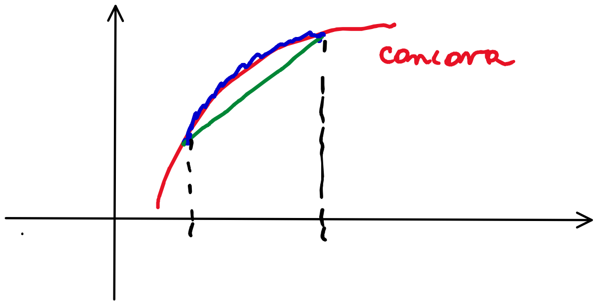
$\lambda \longrightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

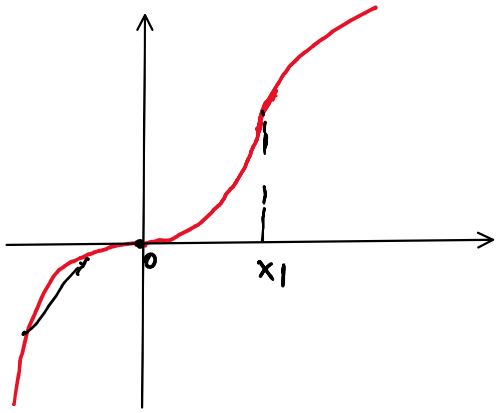
se λ è 0 è x_2

o λ è 1 è x_1

Per $\lambda \in [0,1]$ descrive tutti i punti tra x_1 e x_2.







f è concava (strettamente) in $]-\infty, 0]$

f è convessa (strettamente) in $[0, x_1]$

f è concava (strettamente) in $[x_1, +\infty[$

CARATTERIZZAZIONE DELLA CONVESSITÀ PER FUNZIONI DERIVABILI

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I, I intervallo.

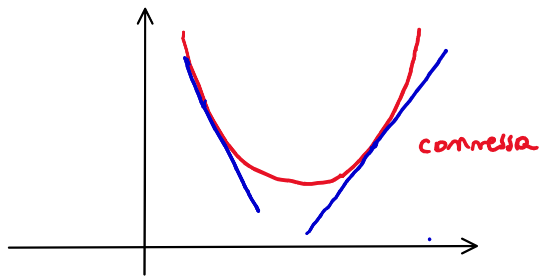
Allora sono equivalenti:

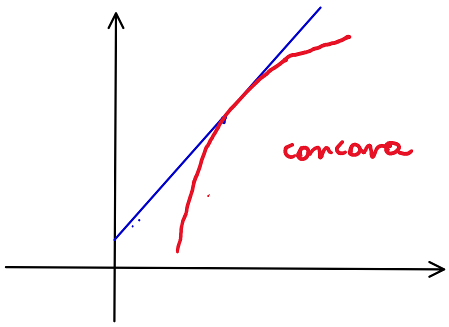
1) f è convessa (o concava) in I.

2) $\forall\, x_0, x \in I$: $\quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\qquad$ (o $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$)

3) f' è monotona crescente (decrescente) in I





Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I. Se $x_0 \in I$ e f' è derivabile in x_0, si dice che f È DUE VOLTE DERIVABILE in x_0 e la derivata di f' in x_0 si dice DERIVATA SECONDA DI f IN x_0. (si indica con

$$f''(x_0) \quad , \quad D^2 f(x_0) \quad , \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \quad , \quad f^{(2)}(x_0) \,)$$

ESEMPIO

$$f(x) = x^7 - 3x^3 + x - 2$$

$$f'(x) = Df(x) = 7x^6 - 9x^2 + 1$$

$$f''(x) = D^2 f(x) = 42x^5 - 18x$$

TEOREMA (CARATT. DELLA CONVESSITÀ PER FUNZIONI DUE VOLTE DERIVABILI)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f due volte derivabile in I (cioè in tutti i punti di I). Allora sono equivalenti:

1) f è convessa in I (o concava in I)
2) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ ($f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$).

ESEMPI

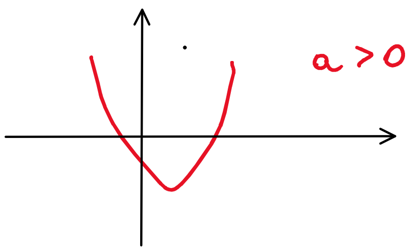
1) $f(x) = ax^2 + bx + c$

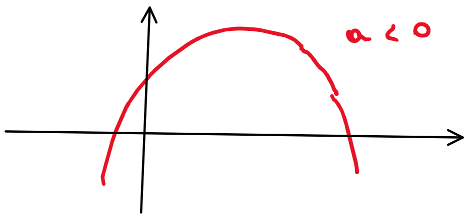
$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f''(x) = 2a$$

$$f''(x) > 0 \iff a > 0$$

$$f''(x) < 0 \iff a < 0$$





OSS Sotto le ipotesi del teorema precedente:

1) $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f$ è strettamente convessa

2) $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \implies f$ è strettamente concava.

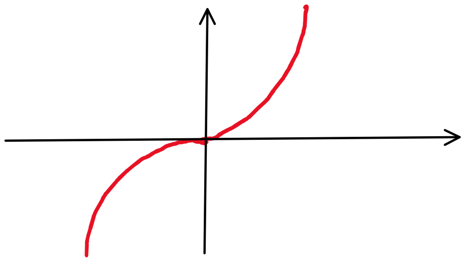
2) $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

$f'' > 0$ se $x > 0 \implies f$ è convessa in $]0, +\infty[$

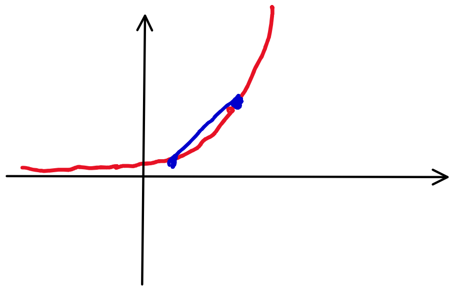
$f'' < 0$ se $x < 0 \implies f$ è concava in $]-\infty, 0[$



3) $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$



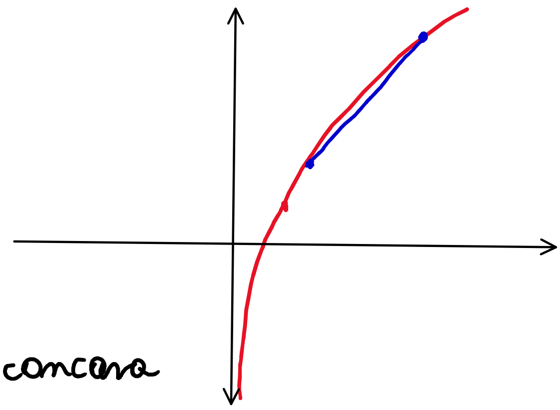
la funzione esponenziale è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
(strettamente).

4) $f(x) = \ln x \quad , x \in]0, +\infty[$

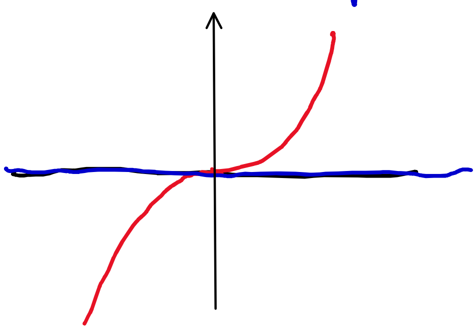
$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} < 0$

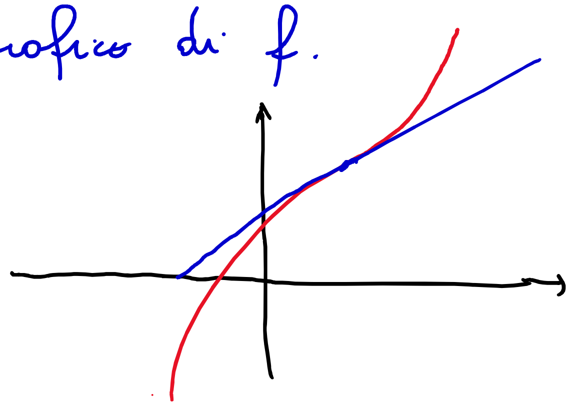
la funzione logaritmo è concava nel suo dominio.



Def Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo. Supponiamo f continua in I. Sia $x_0 \in I$ interno ad I (cioè $x_0 \in I$ non deve essere uno degli estremi di I). Se f è strettamente convessa / concava in $I \cap]-\infty, x_0[$ e strettamente concava / convessa in $I \cap]x_0, +\infty[$ si dice che x_0 è un punto di FLESSO per il grafico di f.



FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE



FLESSO A TANGENTE OBLIQUA.

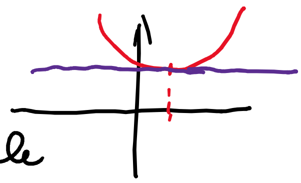
Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, f derivabile in I.

I punti $x_0 \in I$ in cui $f' = 0$ sono detti

PUNTI CRITICI / PUNTI STAZIONARI.

Se f è due volte derivabile:

- $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo locale



- $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo locale.

ESEMPI

$$f(x) = x^3 - x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \qquad f'(x) = 0 \iff x(3x-2) = 0$$

$$\iff x = 0 \lor x = \frac{2}{3}$$

$f''(x) = 6x - 2$

$f''(0) = -2 < 0$

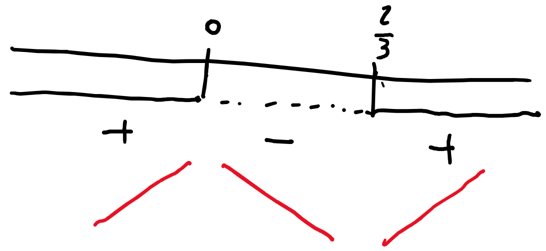
$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 4 - 2 = 2 > 0$

0 è punto di max locale

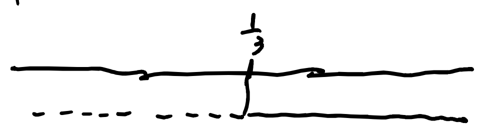
$\frac{2}{3}$ è punto di minimo locale.

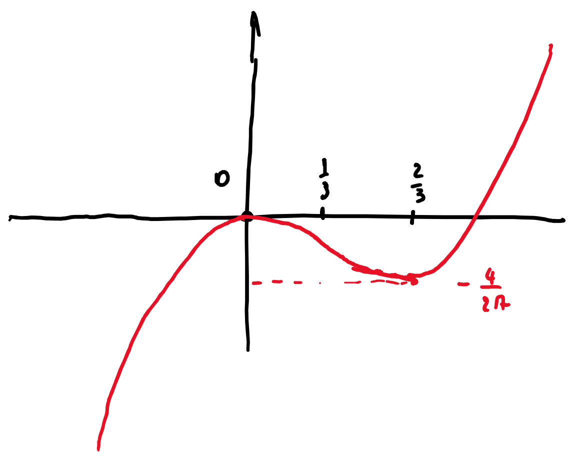
<u>Nota</u>: i punti di max e min si potevano individuare anche tramite lo studio del segno della derivata prima. La derivata seconda ci dà comunque un'informazione in più sulla convessità / concavità

Segno di f' $f'(x) = 3x^2 - 2x$



Segno di f'': $f''(x) = 6x - 2$





$f(0) = 0$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$

Studio di funzioni

1) Dominio.
2) Stabilire se f è pari / dispari o periodica
3) Segno e gli zeri di f (se possibile)
4) Altre informazioni utili:
   intersezioni del grafico con gli assi / punti particolari sul grafico / informazioni sull'immagine ...
5) Limiti significativi (agli estremi del dominio o eventuali punti in cui f non è continua) e asintoti.
6) Derivabilità e calcolo della derivata.
7) Segno e zeri di f'
8) Trovare i punti di max e minimo locale
9) Derivata seconda / concavità e convessità (se richiesto)
10) Grafico

ESERCIZIO

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$

1) Dominio: $1 - x \neq 0 \iff x \neq 1.$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[.$$

2) Simmetrie:

$$f(-x) = \frac{e^{x}}{1+x} \neq f(x) \wedge \neq -f(x)$$

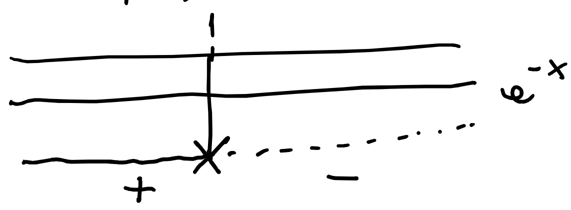
quindi il grafico non è simmetrico.

3) Segno e zeri:

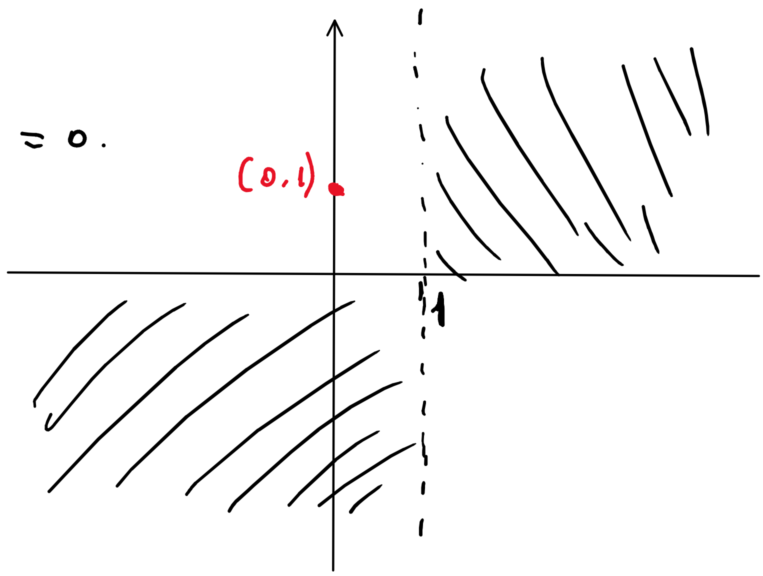
$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

$e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$1 - x > 0 \iff x < 1$



- $f > 0 \quad \forall \; x < 1$
- $f < 0 \quad \forall \; x > 1$
- $\nexists \, x \in Dom(f)$ t.c. $f(x) = 0$.



4) Assi:

- Il grafico non interseca l'asse x
- $f(0) = \frac{1}{1-0} = 1$

  $(0,1)$ è intersezione del grafico con l'asse y.

OSS In generale.

I punti di intersezione di una funzione f con l'asse x sono del tipo $(x_0, 0)$ dove $f(x_0) = 0$.

- Se $0 \in Dom(f)$, allora $(0, f(0))$ è l'unica intersezione del grafico con l'asse y.

5) limiti / asintoti. $\quad Dom(f) =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} \qquad \text{f.i. } \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\overset{t=-x}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{t}}{1+t} = \lim_{t\to+\infty} \Big[\underbrace{\frac{e^{t}}{t}}_{\to+\infty} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{t}}_{\to 0}+1} \Big] \nearrow 1$$

$$= +\infty .$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{e^{-x}}{1-x} = +\infty \qquad \frac{e^{-1}}{0}$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{e^{-x}}{1-x} = -\infty$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Oppure} \\ \displaystyle\lim_{x\to1^-} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{e^{-1}}{1-x} = \frac{e^{-1}}{0^-} = -\infty\end{array}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

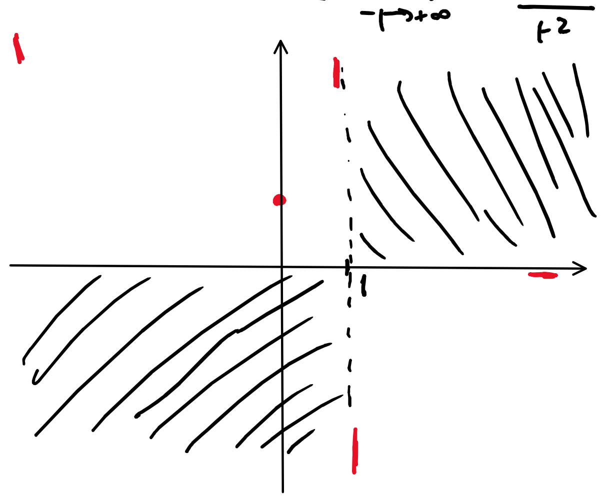
- $y=0$ è un asintoto orizzontale per $x\to+\infty$
- $x=1$ è un asintoto verticale destro e sinistro.

Verifichiamo se c'è un asintoto obliquo a $-\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x(1-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{x}-1}}_{\to -1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} \cdot (-1)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{t}}{t^2} \cdot (-1) = -\infty .$$



6) Derivata

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{(D e^{-x})(1-x) - e^{-x} D(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{-e^{-x}(1-x) - e^{-x}(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{-e^{-x}(1-x) + e^{-x}}{(1-x)^2}$$

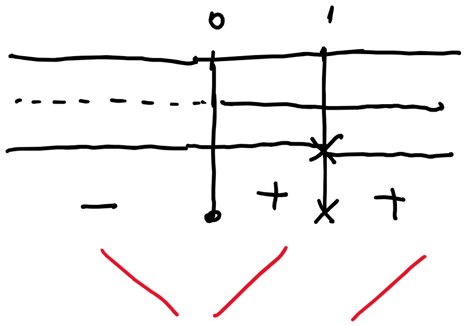
$$= \frac{e^{-x}(-\cancel{1}+x \cancel{+1})}{(1-x)^2} = \frac{x e^{-x}}{(1-x)^2}$$

7) Segno e zeri di f'

$e^{-x} > 0 \quad \forall x$

$x > 0 \iff x > 0$

$(1-x)^2 > 0 \quad \forall x \in Dom(f)$



8) • $x=0$ è un punto di minimo locale.

9) Convessità

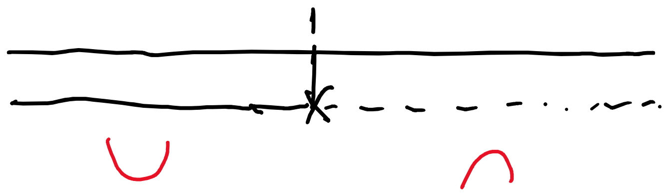
$$f'(x) = \frac{x e^{-x}}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{D(x e^{-x})(1-x)^2 - x e^{-x} D(1-x)^2}{(1-x)^4}$$

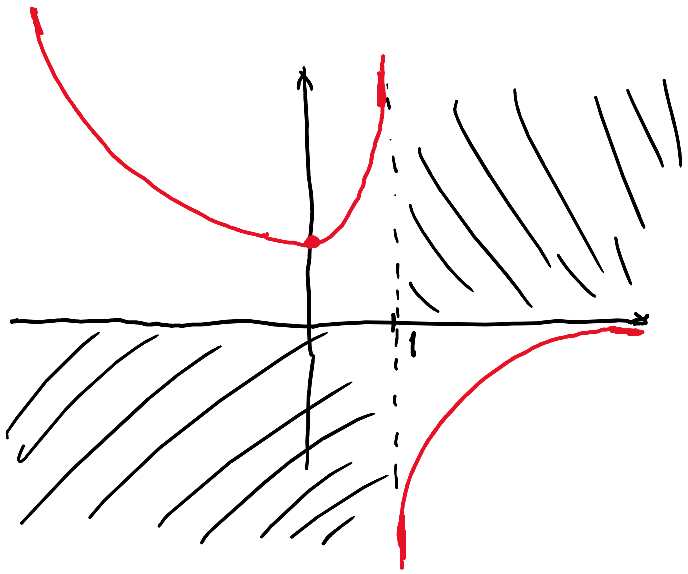
$$= \frac{(e^{-x} - x e^{-x})(1-x)^2 - x e^{-x} \cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(1-x)}\, e^{-x}\left((1-x)^2 + 2x\right)}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{\overbrace{e^{-x}}^{>0}\,\overbrace{(x^2+1)}^{>0}}{\underbrace{(1-x)^3}_{\text{unica quantità che influisce sui } f''}}$$



10) <u>Grafico</u>:



Teorema di De l'Hopital

Serve a calcolare limiti nel caso di forme indeterminate del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ o $\frac{0}{0}$

TEOREMA

Sia I un intervallo. Sia $x_0 \in D(I)$ e siano $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. derivabili in $I \setminus \{x_0\}$. Assumiamo che:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

(oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$)

2) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$

3) $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

OSS

Il teorema si può usare anche per limiti destro e sinistro.

ESEMPI

1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{1 - x}$ $\qquad f(x) = e^{-x}$, $g(x) = 1 - x$ $\qquad$ f.i. $\frac{+\infty}{+\infty}$

$f'(x) = -e^{-x}$

$g'(x) = -1$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-e^{-x}}{-1} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = e^{+\infty} = +\infty.$$

2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + 5x - 6}{x - 1}$ $\qquad \frac{0}{0}$ f.i.

$$\lim_{x \to 1} \frac{4x^3 + 5}{1} = \frac{4 + 5}{1} = 9$$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1.$