CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2016/17

<u>Appello del 6 novembre 2017</u>

1. Sia data la permutazione

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6,7)(8,9,10,11,12,13,14,15,16,17) \in S_{17}.$$

(a) Determinare l'insieme $H = \{\alpha \in \langle\sigma\rangle \mid \mathrm{Supp}\,\alpha = \{1,2,...,17\}\}$.

(b) Dire se l'insieme $K = \{\alpha \in \langle\sigma\rangle \mid \alpha(8) \in \{8,10,12,14,16\}\}$ è un sottogruppo di S_{17}.

2. Dati interi positivi *n* ed *m*, si consideri l'applicazione

$$\begin{gathered} \varphi_{n,m} : \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{14} \to \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{14} \\ (\alpha, \beta) \mapsto (n\alpha, m\beta) \end{gathered}$$

(a) Determinare tutti i valori di *n* ed *m* per i quali $\varphi_{n,m}$ è surgettiva.

(b) Determinare tutti i valori di *n* ed *m* per i quali $\varphi_{n,m}$ è un omomorfismo di anelli.

(c) Determinare la cardinalità di $\varphi_{10,21}{}^{-1}(([2]_{8,}[7]_{14}))$.

3. Sia p un numero primo positivo, e si consideri il polinomio $f(x) = x^{p-1} - [2^{3700}]_p \in \mathbb{Z}_p[x]$.

(a) Determinare quattro valori di p per i quali $f(x)$ ha radici in $\mathbb{Z}_p$ e queste sono tutte semplici.

(b) Determinare una fattorizzazione di $f(x)$ per $p = 7$.