CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2018/19

Appello del 15 novembre 2019

1. Siano date le seguenti due permutazioni di S_{12} :

$$\sigma = (1,2)(3,4,5)(6,7,8,9,10,11,12),$$
$$\tau = (1,2,3)(4,5,6,7)(8,9,10,11,12).$$

   (a) Determinare $H = \left\{ \alpha \in \langle \sigma \rangle \middle| \alpha(1) \neq 2 \right\}$.

   (b) Determinare $K = \left\{ \alpha \in \langle \tau \rangle \middle| \alpha(8) \notin \{9,10,11,12\} \right\}$.

   (c) Determinare $H \cap K$.

2. Sia n un intero maggiore di 1.

   (a) Determinare tutti i valori di n per i quali è ben definita l'applicazione $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n^2}$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_n) = [a^2]_{n^2}$.

   (b) Dire se gli anelli $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{n^3}$ e $\mathbb{Z}_{n^2} \times \mathbb{Z}_{n^2}$ sono isomorfi.

   (c) Dato l'omomorfismo di gruppi $\psi : \mathbb{Z}_{n^3} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{n^2}$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\psi([a]_{n^3}) = ([a]_n, [a]_{n^2})$, determinare le cardinalità del suo nucleo e della sua immagine.

3. Dati due numeri interi positivi n e m, ed un numero primo positivo p, si determinino tutti i valori di n, m e p per i quali il polinomio $f(x) = x^m + x^n + p$ ha almeno una radice razionale.