

# CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

## Algebra n.1

Anno Accademico 2021/22

Appello del 6 giugno 2022

1. Date, in  $S_{23}$ , le permutazioni

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)(11, 12, 13, 14, 15, 16)(17, 18, 19, 20, 21, 22, 23),$$

$$\tau = (1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10)(11, 13, 15)(12, 14, 16)(17, 19, 21, 23, 18, 20, 22),$$

si consideri il centralizzante  $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{23} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$ .

(a) Determinare  $C(\sigma) \cap \langle \tau \rangle$ .

(b) Determinare  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$ .

2. Dati gli interi  $n, m$  maggiori di 1, si determinino gli insiemi degli interi

(a)  $r > 1$  per i quali è ben definita l'applicazione

$$\varphi: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_r, \text{ tale che, per ogni } a, b \in \mathbb{Z}, \varphi([a]_n, [b]_m) = [a + b]_r;$$

(b)  $s > 1$  per i quali è ben definita l'applicazione

$$\psi: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_s, \text{ tale che, per ogni } a, b \in \mathbb{Z}, \psi([a]_n, [b]_m) = [ab]_s.$$

(c) Dato  $p$ , un numero primo positivo, dire se è surgettiva l'applicazione

$$\mathcal{G}: \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$$

tale che, per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p^*$ ,  $\mathcal{G}(\alpha, \beta) = \alpha^5 \beta^7$ .

3. Dato un numero primo  $p > 3$ , si considerino i seguenti polinomi di  $\mathbb{Z}_p[x]$ :

$$f(x) = x^{p^2-p} + x^p - x^{p-3} - \overline{1}, \quad g(x) = x^p - x^{p-1} - x^{p-2} - x^{p-3} + \overline{1}.$$

(a) Determinare, al variare di  $p$ , il numero delle radici di  $f(x)$  in  $\mathbb{Z}_p$ , con le rispettive molteplicità.

(b) Determinare, al variare di  $p$ , il numero di radici comuni a  $f(x)$  e  $g(x)$  in  $\mathbb{Z}_p$ .