CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2010/11

<u>Appello del 24 gennaio 2011</u>

1. Date le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 7 & 11 & 9 & 6 & 13 & 4 & 2 & 12 & 10 & 1 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \in S_{13},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 7 & 10 & 9 & 8 & 3 & 12 & 11 & 6 & 1 & 13 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_{13},$$

siano $H_1 = \langle \sigma \rangle, H_2 = \langle \tau \rangle$. Posto $G = H_1 \cap H_2$,

(a) determinare, in G, un elemento di periodo 6;
(b)* provare che G è un gruppo ciclico di ordine 6.

2. Sia $A = \{[a]_{28}x + [b]_{28} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}_{28}[x]$.
   (a) Provare che A è un sottogruppo di $\mathbb{Z}_{28}[x]$.
   (b) Dire se A è un sottoanello di $\mathbb{Z}_{28}[x]$.
   (c) Provare che l'applicazione $\varphi : A \to \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_2$ tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_{28}x + [b]_{28}) = ([b]_{14}, [a+b]_2)$ è ben definita ed è un omomorfismo di gruppi.
   (d) Determinare il nucleo di φ e la sua cardinalità.

3. Provare che il polinomio $f(x) = x^5 + 3x^4 + 5x^3 - x^2 - 2x - 5 \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.