ESERCITAZIONE SUL CALCOLO DEI LIMITI

Algebra dei limiti

Limiti della somma, differenza, prodotto e quoziente di funzioni.

Supponiamo che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \underline{\underline{l_1}} \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \underline{l_2 \in \mathbb{R}}$

Allora

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = l_1 \pm l_2$ (Il limite della somma è uguale alla somma dei limiti)
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$ con l'ipotesi $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0, eccetto al più x_0, e $l_2 \neq 0$.

Cosa accade se l_1 e/o l_2 sono infiniti, oppure, nel caso 3., se $l_2 = 0$?

<u>Ad es.</u> se $l_1 = +\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R}$, si può provare che

vale: $\lim\limits_{x \to x_0} \underbrace{f(x)}_{+\infty} + \underbrace{g(x)}_{l_2} = +\infty$

(*) Si sintetizza con l'espressione "$+\infty + l_2 = +\infty$"

<u>Premessa</u> al seguito.

<u>Def.</u> $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^+$ (rispett. 0^-) $\iff$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c.

$f(x) > 0 \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$ (rispett. $f(x) < 0$ ....)

<u>Es.</u> $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0^+$.

Aritmetizzazione di ∞.

Valgono le seguenti, nel senso sopra indicato (vedi (*))

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$+\infty + l = +\infty \quad \forall l \in \mathbb{R}$$

$$-\infty + l = -\infty \quad \forall l \in \mathbb{R}$$

se $l>0$: $\quad l \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$

se $l<0$: $\quad l \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \qquad (-5)\cdot(-\infty) = +\infty$

se $l>0 \quad \dfrac{l}{0^\pm} = \pm\infty$

se $l<0 \quad \dfrac{l}{0^\pm} = \mp\infty \qquad \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

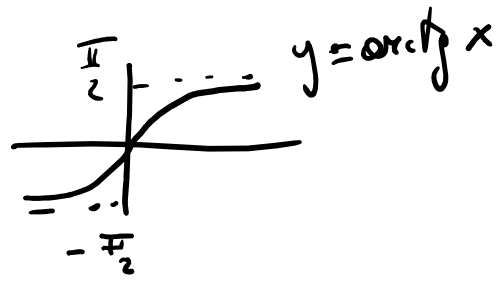
se $l>0 \quad \dfrac{l}{\pm\infty} = 0^\pm$

se $l<0 \quad \dfrac{l}{\pm\infty} = 0^\mp$.

Restano escluse dal precedente schema le forme

$$\left.\begin{array}{l} +\infty - \infty \\ 0\cdot(\pm\infty) \\ \dfrac{0}{0}\,,\ \dfrac{\infty}{\infty} \end{array}\right\} \text{"forme indeterminate"}$$

Esempi: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt{x}}_{\to+\infty} + \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\to\frac{\pi}{2}} = +\infty$



2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{e^x}_{\to+\infty} + \underbrace{x^3}_{\to+\infty} = +\infty$

3) $\lim_{x \to 3^+} \frac{e^x}{x-3} = +\infty$ ($e^x \to e^3 > 0$, $x-3 \to 0^+$) "$\frac{e^{>0}}{0^+} = +\infty$".

limiti di polinomi per $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$ (generico polinomio di grado n $(a_n \neq 0)$)

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x^n \Big(a_n + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n}}_{\text{termini che tendono a } 0} \Big)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$ (a seconda del segno di a_n e della parità o disparità di n)

es. 1) $$\lim_{x \to +\infty} 4x^2 - 7x + 2 = \lim_{x \to +\infty} x^2 \Big(4 - \underbrace{\frac{7}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0} \Big)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 4x^2 = +\infty.$$

2) $$\lim_{x \to -\infty} 5x^3 + x^2 + 2 = \lim_{x \to -\infty} x^3 \Big(5 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{x^3}}_{\to 0} \Big)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 5x^3 = -\infty.$$

limiti di funzioni razionali fratte (quozienti di polinomi)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$$

$a_m \neq 0 \Rightarrow \text{grad}\, P = m$

$b_n \neq 0 \Rightarrow \text{grad}\, Q = n$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^m(a_m + \text{termini che tendono a } 0)}{x^n(b_n + \text{termini che tendono a } 0)}$$

$$= \frac{a_m}{b_n} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} x^{m-n} = \begin{cases} \dfrac{a_m}{b_n} & \text{se } m = n \\ \infty \text{ (con segno opportuno)} & \text{se } m > n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}$$

ES. 1) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4 + 3x - 5}{-x^4 + 7x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^4}\left(2 + \overset{\to 0}{\frac{3}{x^3}} - \overset{\to 0}{\frac{5}{x^4}}\right)}{\cancel{x^4}\left(-1 + \underset{\to 0}{\frac{7}{x^3}}\right)} = -2 .$$

2) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 - 3x + 1}{x^2 - 8x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3\left(5 - \overset{\to 0}{\frac{3}{x}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{x^3}}\right)}{x^2\left(1 - \underset{\to 0}{\frac{8}{x}}\right)}$

$$= \lim_{x \to -\infty} 5x = -\infty .$$

Oss. I limiti di quozienti di polinomi per $x \to x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) possono dare origine alla forma indet. $\frac{0}{0}$. Vediamo come si risolve.

es. 1) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ $\quad x = 2$ è radice

$x \to 2 \qquad x^2-4 \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$ $\qquad x=2$ è radice di entrambi i polinomi al numeratore e al denominatore

scompon. num. e denom.

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

(Ricorda: $x = x_0$ è radice di $P(x) \iff P(x) = (x-x_0)\cdot Q(x)$, Q polin.)

$P(x) = x^2 - x - 2$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}.$$

2) $\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+1} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to -1} (x+1)^2 = 0$$

limiti con la funzione potenza ad esponente frazionario (radici).

1) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 5\sqrt[3]{x} + x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

come per i polinomi metto in evidenza la potenza di grado max

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\frac{3}{5}} + x^{\frac{1}{3}}}{x^2 + 5\cdot x^{\frac{1}{3}} + x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\frac{3}{5}}\left(1 + \underbrace{x^{\overbrace{\frac{1}{3}-\frac{3}{5}}^{<0}}}_{\to 0}\right)}{x^2\left(1 + 5\underbrace{x^{\overbrace{\frac{1}{3}-2}^{<0}}}_{} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{5}}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{5}-2} = \lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{7}{5}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{7}{5}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}} = 0.$$

Teorema (limite della funzione composta) (solo enunciato)

Siano $g: X \to Y$, $f: Z \to \mathbb{R}$ due funzioni per cui sia definita la funzione composta $f \circ g$ almeno in un intorno di x_0, dove x_0 p.to di accumulazione di X.

Supponiamo che:

1) $\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$

2) $\exists \lim_{y\to y_0} f(y) = l$

3) $g(x) \neq y_0 \quad \forall x \neq x_0$ in un intorno di x_0

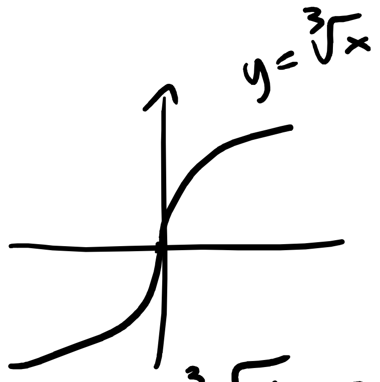
Allore $\exists \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l$.

Es. 1) $\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x+1}{x-1}} = (e^{+\infty}) = +\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^4-5x}{7x^4-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{7x^4 - 2} \qquad \searrow \frac{1}{7}$$

3) $$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{5x^7 - 3x^2 + 1} = -\infty$$
$$\searrow -\infty$$



$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$$

Ulteriori esercizi con le radici:

4) $$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-3} \qquad (+\infty - \infty)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-3}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3}\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3}}$$

razionalizziamo

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} + 3}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3}} = \left(\frac{4}{+\infty}\right) = 0.$$

(per es. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}$ (Risult. $= -\infty$)).

Infiniti e infinitesimi

Def. Una funzione f si dice infinita (o un infinito) in x_0 (oppure per $x \to x_0$) se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Una funzione f si dice infinitesima (o un infinitesimo) in x_0 (oppure per $x \to x_0$) se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Ad es. l'esponenziale $y = e^x$ è un infinito per $x \to +\infty$ ed è un infinitesimo per $x \to -\infty$.

Prop. Il prodotto di una funzione infinitesima per una funzione limitata è infinitesimo.

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{f(x)}_{\to 0} \cdot \underbrace{g(x)}_{\text{limitata}} = 0$$

Es. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} \underbrace{(\sin x)}_{\text{non ammette limite per } x \to +\infty \text{ ma è limitata}} = 0$

Prop. La somma di una funzione infinita e di una funzione limitata è infinita.

Es. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^3}_{\to +\infty} + \underbrace{\sin x}_{\text{è limitata}} = +\infty$

Verifica: del preced. $\lim_{x \to +\infty} x^3 \left(1 + \frac{\sin x}{x^3}\right) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

$\frac{\sin x}{x^3} \to 0$ per il preced.
(prodotto di una funz. infinitesima $\frac{1}{x^3}$ per una funzione limitata $\sin x$)