CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2021/22

Appello del 21 settembre 2022

1. Sia data, in S_{18}, la permutazione

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6,7)(8,9,10,11,12)(13,14,15,16,17,18).$$

(a) Determinare un sottogruppo H di S_{18} avente ordine 27 e tale che $H \cap \langle \sigma \rangle$ non sia il sottogruppo banale.

(b) Determinare l'intersezione tra $\langle \sigma \rangle$ ed il seguente sottogruppo di S_{18}:

$$K = \left\{ (4,5,6,7)^a (13,14,15,16,17,18)^b \,\middle|\, a,b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Dato un intero n maggiore di 1, si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n^2}$$

tale che, per ogni $a,b \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_n,[b]_n) = [nab]_{n^2}$.

(a) Determinare l'insieme dei valori di n per i quali φ è ben definita.

(b) Determinare $\left|\varphi^{-1}([n]_{n^2})\right|$ al variare di n.

3. Dato un numero primo p maggiore di 2, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^p + x^{p-1} + x^{p-2},$$
$$g(x) = x^{p^3} + x^{p^2} + 1,$$
$$h(x) = x^{p^2} + x^{2p} + x^{p+2}.$$

(a) Determinare, al variare di p, le radici comuni a $f(x)$ e $g(x)$ in $\mathbb{Z}_p$.

(b) Determinare, al variare di p, le radici comuni a $g(x)$ e $h(x)$ in $\mathbb{Z}_p$.

(c) Determinare l'insieme dei valori di p per i quali $f(x)$ e $h(x)$ hanno in $\mathbb{Z}_p$ esattamente due radici comuni.