CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2017/18

Appello dell'8 febbraio 2018

1. Si considerino in S_{21} le permutazioni

$$\sigma, \text{ di struttura ciclica } (10,5,4,1,1),$$
$$\tau, \text{ di struttura ciclica } (15,2,2,2),$$

e, in S_{12}, le permutazioni

$$\alpha, \text{ di struttura ciclica } (8,4),$$
$$\beta, \text{ di struttura ciclica } (4,4,2,2).$$

(a) Provare che l'ordine di $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$ è 1 oppure 5.

(b) Determinare α e β in modo che $\langle\alpha\rangle \cap \langle\beta\rangle$ abbia ordine 2.

(c) Determinare α e β in modo che $\langle\alpha\rangle \cap \langle\beta\rangle$ sia il sottogruppo banale.

2.

(a) Provare che $n = 2$ è l'unico intero maggiore di 1 per il quale $\varphi(n)$ è dispari.

(b) Determinare tutti gli interi $n > 1$ tali che $3^{\varphi(n^2-n)} \equiv 1 \pmod 5$.

3. Si consideri il polinomio $f(x) = x^6 - 5x^3 + 6 \in \mathbb{Z}[x]$. Dato un primo positivo *p*, sia $\overline{f(x)}$ la sua riduzione modulo *p*.

(a) Provare che $\overline{f(x)}$ non ha in $\mathbb{Z}_p$ radici di molteplicità maggiore di 3.

(b) Sapendo che per $p = 643$ il polinomio $\overline{f(x)}$ si decompone in $\mathbb{Z}_{643}[x]$ nel prodotto di fattori lineari, provare che $2^{214} \equiv 1 \pmod{643}$.