Algebra n. 3 - NOTE ALLA LEZIONE 11

Osservazione 11.2

c) Se gli elementi $\alpha, \tilde{\alpha} \in K$, algebrici su F, sono coniugati su F, allora, in virtù del Teorema 4.6 (che riportiamo più sotto), applicato per $F = \tilde{F}$, $\sigma = \mathrm{id}_F$, $f(x) = \tilde{f}(x)$, $p(x) = \tilde{p}(x)$, $K = \tilde{K}$, esiste un F-automorfismo η di K che invia α in $\tilde{\alpha}$. Viceversa, se esiste un η siffatto, allora è immediato verificare che:

$$p(\tilde{\alpha}) = p(\eta(\alpha)) = \eta(p(\alpha)) = \eta(0) = 0$$

$\uparrow$

segue dal fatto che η

- è un omomorfismo di anelli,
- lascia fissi gli elementi di F (e quindi, in particolare, i coefficienti di $p(x)$)

Ciò prova che α e $\tilde{\alpha}$ sono coniugati su F.

Teorema 4.6 (*Teorema di estensione degli isomorfismi, forma forte*) Siano F e $\tilde{F}$ campi, sia $\sigma: F \to \tilde{F}$ un isomorfismo di campi. Sia $f(x) \in F[x]$. Posto $\tilde{f}(x) = \bar{\sigma}(f(x))$, sia K un campo di spezzamento di $f(x)$ su F, e sia $\tilde{K}$ un campo di spezzamento di $\tilde{f}(x)$ su $\tilde{F}$. Sia $\alpha \in K$, sia $p(x)$ il suo polinomio minimo su F, e sia $\tilde{\alpha} \in \tilde{K}$ una radice di $\tilde{p}(x) = \bar{\sigma}(p(x))$. Esiste allora un isomorfismo di campi $\eta: K \to \tilde{K}$ che estende σ e tale che $\eta(\alpha) = \tilde{\alpha}$.

Esempi 11.3

b) Siano $a, b \in \mathbb{Q}$. Sia $\alpha = a + b\sqrt{2}$. Se $b = 0$, allora $\alpha \in \mathbb{Q}$ ed è coniugato solo a se stesso. Se invece $b \neq 0$, allora $\alpha \notin \mathbb{Q}$ ed il polinomio seguente è il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$:

$$p(x) = (x - (a + b\sqrt{2}))(x - (a - b\sqrt{2})) = x^2 - 2ax + a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Q}[x]$$

Infatti, $p(x)$, oltre ad essere monico e ad avere α come radice, è irriducibile su $\mathbb{Q}$ poiché è di grado due e le sue radici $a + b\sqrt{2}, a - b\sqrt{2}$ non sono razionali.

<u>Dimostrazione</u> del **Teorema 11.4**:

Sul campo K il polinomio $f(x)$ si spezza nel prodotto di fattori lineari, secondo la seguente decomposizione:

$$f(x) = c\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i), \qquad \text{con } c \in F,\ \alpha_i \in K.$$

Ne consegue che

$$f(x) = \bar{\varphi}(f(x)) = c\prod_{i=1}^{n}(x - \varphi(\alpha_i)), \qquad \text{con } \varphi(\alpha_i) \in \varphi(K).$$

Pertanto il polinomio $f(x)$ si spezza nel prodotto di fattori lineari anche su $\varphi(K)$. Dunque $\varphi(K)$ contiene un campo di spezzamento di $f(x)$ su F; poiché questo campo di spezzamento è, come $\varphi(K)$, contenuto in L, deve coincidere con K. Ne consegue che $K \subset \varphi(K)$. In realtà vale l'uguaglianza, in quanto i due campi sono F-spazi vettoriali aventi la stessa dimensione finita.

Per la considerazione conclusiva della dimostrazione, occorre applicare il Teorema 4.6 per $F = \tilde{F}$ e $\sigma = \mathrm{id}_F$, e con i seguenti dati, da associare a quelli dell'enunciato come indicato qui sotto:

$$\begin{aligned} &f(x), \tilde{f}(x) \to g(x) \\ &p(x), \tilde{p}(x) \to f(x) \\ &K, \tilde{K} \to L \\ &\tilde{\alpha} \to \beta \end{aligned}$$

Lemma 11.6

Essendo $F \subset K_{G(K,F)}$, si ha $G(K, K_{G(K,F)}) \subset G(K,F)$. D'altra parte, se $\varphi \in G(K,F)$, allora naturalmente φ lascia fisso ogni elemento di $K_{G(K,F)}$ (ossia ogni elemento che venga lasciato fisso da ogni elemento di $G(K,F)$.)

Esempio 11.11

a) Si ha, per il Teorema di moltiplicazione dei gradi per le estensioni finite successive, applicato alla successione $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$,

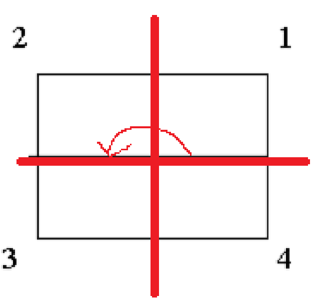
$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}] = \underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}):\mathbb{Q}(\sqrt{2})]}_{\substack{2 \\ x^2-3 \\ \text{polinomio minimo di } \sqrt{3} \text{ su } \mathbb{Q}(\sqrt{2})}} \quad \underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]}_{\substack{2 \\ x^2-2 \\ \text{polinomio minimo di } \sqrt{2} \text{ su } \mathbb{Q}}} \quad = 4$$

Per ogni automorfismo φ del campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ si ha:

$$\varphi(\sqrt{2})^2 = \varphi(\sqrt{2}^2) = \varphi(2) = 2, \quad \text{da cui} \quad \varphi(\sqrt{2}) \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}.$$

Analogamente si deduce che $\varphi(\sqrt{3}) \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

Il gruppo di Klein è il gruppo delle simmetrie del rettangolo:



b) Un campo di spezzamento di $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ su $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega\sqrt[3]{2}, \omega^2\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{2})$. L'ultima uguaglianza si prova facilmente dimostrando separatamente le due inclusioni. Per il resto:

$$[\mathbb{Q}(\omega,\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}] = \underbrace{[\mathbb{Q}(\omega)(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})]}_{\substack{2 \\ \Phi_3(x)=x^2+x+1 \\ \text{polinomio minimo di } \omega \text{ su } \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \\ \text{base: } 1,\ \omega}} \quad \underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]}_{\substack{3 \\ x^3-2 \\ \text{polinomio minimo di } \sqrt[3]{2} \text{ su } \mathbb{Q} \\ \text{base: } 1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4}}} = 6$$

Base: