Algebra n. 3 - NOTE ALLA LEZIONE 10

Base di un'estensione finita semplice:

Dati un campo F, ed un elemento α di una sua estensione, algebrico su F, l'estensione $F(\alpha)$ è finita su F, ed il suo grado è pari al grado del polinomio minimo di α su F. Inoltre, detto n questo grado, una base di $F(\alpha)$ come spazio vettoriale su F è data dagli elementi 1, $\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{n-1}$.
Quindi, in particolare, essendo $x^2 - 2$ il polinomio minimo di $\sqrt{2}$ su $\mathbb{Q}$, l'estensione $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ha grado 2 su $\mathbb{Q}$, ed una base è data da 1, $\sqrt{2}$.

Esempio 10.2

a) Occorre, naturalmente, verificare che l'applicazione $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ definita da $\varphi(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$, per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$, (applicazione che certamente è un automorfismo di $\mathbb{Q}-$ spazio vettoriale) sia un omomorfismo di anelli, ossia conservi anche il prodotto. In effetti, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$,

$$\varphi((a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})) = \varphi(ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}) = ac + 2bd - (ad + bc)\sqrt{2}$$

$$\varphi(a + b\sqrt{2})\varphi(c + d\sqrt{2}) = (a - b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) = ac + 2bd - (ad + bc)\sqrt{2}.$$

Osservazione 10.4

Questo è l'enunciato citato:

Corollario 4.5 (*Teorema di estensione degli isomorfismi*) Siano F e $\widetilde{F}$ campi, sia $\sigma : F \to \widetilde{F}$ un isomorfismo di campi. Sia $p(x) \in F[x]$ irriducibile. Posto $\tilde{p}(x) = \bar{\sigma}(p(x))$, sia K un campo di spezzamento di $p(x)$ su F, e sia $\widetilde{K}$ un campo di spezzamento di $\tilde{p}(x)$ su $\widetilde{F}$. Siano $\alpha \in K$ e $\tilde{\alpha} \in \widetilde{K}$ radici di $p(x)$ e $\tilde{p}(x)$ rispettivamente. Esiste allora un isomorfismo di campi $\eta : K \to \tilde{K}$ che estende σ e tale che $\eta(\alpha) = \tilde{\alpha}$.

Lo applichiamo al caso in cui $F = \tilde{F}, \sigma = \mathrm{id}_F, p(x) = \tilde{p}(x) = f(x)$, $K = \tilde{K}$, ove $\alpha, \tilde{\alpha} \in K$ sono radici di $f(x)$. Ne concludiamo che esiste un F-automorfismo di K (ossia un elemento di $G(K, F)$) che invia α in $\tilde{\alpha}$.