CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2008/09

<u>Appello del 22 giugno 2009</u>

1. Si consideri la seguente permutazione:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 4 & 1 & 2 & 8 & 3 & 5 & 7 & 10 & 9 & 6 \end{pmatrix} \in S_{11}.$$

   (a) Determinare la decomposizione di σ in cicli disgiunti.
   (b) Determinare il periodo di σ.
   (c) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap A_{11}$, indicando esplicitamente tutti i suoi elementi.

2. Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 3b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   (a) Provare che A è un sottoanello unitario dell'anello $M_2(\mathbb{Z})$ e dire se è commutativo.
   (b) Provare che l'applicazione $\varphi : A \to \mathbb{Z}_4$ tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi\begin{pmatrix} a & 0 \\ 3b & a \end{pmatrix} = [a + 2b]_4,$$

   è un omomorfismo di anelli.
   (c) Determinare il nucleo $Ker\varphi$.

3. Determinare la fattorizzazione del polinomio $f(x) = 2x^5 + 11x^4 - 7x^3 - 3x - 3$ in $\mathbb{Q}[x]$.