

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2025/26

Appello del 23 settembre 2026

1. Si considerino in S_{18} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)(14, 15, 16, 17, 18),$$

$$\tau = (1, 3)(2, 4)(5, 6)(7, 13, 12, 11, 10, 9, 8)(14, 16, 18, 15, 17).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{18} : $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{18} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

- (a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.
- (b) Determinare un sottogruppo di $C(\sigma)$ avente ordine 3.
- (c) Determinare due sottogruppi di $C(\sigma)$ aventi ordine 4 e non isomorfi.

2.

- (a) Dire se esiste un isomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{120}$ a $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{40}$, e in caso affermativo determinarlo.
- (b) Dire se esiste un monomorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}_{231}$ a $\mathbb{Z}_{49} \times \mathbb{Z}_{363}$, e in caso affermativo determinarlo.

3. Dato un numero primo p positivo, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^4} + x^{p^3} + x^{p^2} + x^p + x + \bar{1},$$

$$g(x) = x^{p^3} - x^p + x - \bar{1}.$$

- (a) Determinare, al variare di p , il resto della divisione di $f(x)$ per $g(x)$.
- (b) Determinare due primi p distinti per i quali $\text{MCD}(f(x), g(x))$ è prodotto di fattori lineari in $\mathbb{Z}_p[x]$.