

Prova Scritta di **Matematica Discreta**

C.L. **ITPS** – Track A–L

19 Febbraio 2025

Traccia 1

Esercizio 1.

Calcolare determinante, inversa e periodo della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{Z}_5).$$

Esercizio 2.

Determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione

$$646s + 494t = -114.$$

Esercizio 3.

Quante sono le stringhe di bit di lunghezza 13 in cui 1 compare un numero pari di volte?

Esercizio 4.

Dato il polinomio $f = x^4 + x^3 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$, sia $A := \mathbb{Z}_5[x]/(f)$ il relativo anello quoziente.

- (1) Esprimere f come prodotto di polinomi irriducibili di $\mathbb{Z}_5[x]$
- (2) detto $\alpha = [x - 3]_f \in A$, determinare se α è invertibile in A .

Esercizio 5.

Sia $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione definita ricorsivamente tramite

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_n = 9a_{n-1} - 20a_{n-2} \end{cases} \quad \text{per ogni } n \geq 2.$$

Dimostrare che la forma chiusa di a è $a_n = (-3)5^n + 4^{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.