

Prova Scritta di **Matematica Discreta**  
C.L. **ITPS** – Track A–L  
19 Febbraio 2025

**Traccia 1**

**Esercizio 1.**

Calcolare determinante, inversa e periodo della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{Z}_5).$$

**Esercizio 2.**

Determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione

$$646s + 494t = -114.$$

**Esercizio 3.**

Quante sono le stringhe di bit di lunghezza 13 in cui 1 compare un numero pari di volte?

**Esercizio 4.**

Dato il polinomio  $f = x^4 + x^3 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ , sia  $A := \mathbb{Z}_5[x]/(f)$  il relativo anello quoziante.

- (1) Esprimere  $f$  come prodotto di polinomi irriducibili di  $\mathbb{Z}_5[x]$
- (2) detto  $\alpha = [x - 3]_f \in A$ , determinare se  $\alpha$  è invertibile in  $A$ .

**Esercizio 5.**

Sia  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la successione definita ricorsivamente tramite

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_n = 9a_{n-1} - 20a_{n-2} \quad \text{per ogni } n \geq 2 \end{cases}.$$

Dimostrare che la forma chiusa di  $a$  è  $a_n = (-3)5^n + 4^{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .