CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2019/20

<u>**Appello del 15 gennaio 2020**</u>

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{11}:

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7)(8,9)(10,11)$$
$$\tau = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10,11)$$

(a) Determinare tutte le coppie di interi (m,n) tali che le permutazioni σ^m e τ^n siano disgiunte.
(b) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
(c) Provare che, per ogni sottogruppo *H* di S_{11} contenente $\{\sigma, \tau\}$, esiste un 7-ciclo appartenente ad *H*.

2. Sia dato un intero $n > 1$.

(a) Determinare l'insieme dei valori di *n* per i quali è ben definita l'applicazione $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n^2}$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_n) = [a+n]_{n^2}$.
(b) Determinare l'insieme dei valori di *n* per i quali l'applicazione $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n^2}$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_n) = [na]_{n^2}$, è un omomorfismo di anelli.

3. Dato un numero primo positivo *p*, si consideri il polinomio $f(x) = x^{3p} + x^{2p} - x^p - \overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$.

(a) Determinare, al variare di *p*, tutte le radici di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_p$, con le rispettive molteplicità.
(b) Determinare $\mathrm{MCD}(f(x), x^{3p} - x^{2p} - x^p + \overline{1})$.